

El Estereoautógrafo de E. von Orel

PARTE PRIMERA

El método de las paralajes y el estereocomparador

I.— IDEAS GENERALES

Los primeros rudimentos de la Geometría nos enseñan que un punto queda determinado por dos rectas que en él se corten, y un cuerpo cualquiera por pares de rectas que definan cada uno de sus puntos. Entre los infinitos sistemas de rectas que para determinar un cuerpo pudieran elegirse, son las más adecuadas para la práctica las que forman parte de dos radiaciones de primer orden, esto es, las que se hallan distribuidas en dos grupos, teniendo las de cada uno de éstos un punto común. Vemos pues, que podemos definir un cuerpo siempre que tengamos las rectas que unen cada uno de sus puntos con dos puntos fijos, arbitrariamente elegidos.

La intersección de uno de estos haces de rectas con un plano cualquiera es la «perspectiva» del cuerpo, sobre este plano y desde el vértice de aquel haz. Y todos sabemos que una buena cámara fotográfica nos da una perspectiva casi perfecta de los objetos fotografiados, sobre la superficie sensible de la placa, siendo el centro óptico del objetivo, el centro de proyección correspondiente.

En resumen: que si desde dos puntos cualesquiera obtenemos otras tantas fotografías simultáneas de un mismo cuerpo, y hacemos desaparecer éste, nos será posible deducir de las fotografías la posición que ocupaba cada uno de los puntos del citado cuerpo. Esta es la base de la Fotogrametría.

Fácilmente se comprende que las radiaciones fotográficas antes indicadas se pueden reproducir cuantas veces queramos, siempre que sea conocida, además de la placa, la posición que respecto a ella ocupaba, en el momento de la exposición, el centro óptico del objetivo de la cámara. Y que las dos fotografías de un mismo objeto determinan éste cuando se colocan en la misma posición relativa en que se obtuvieron.

De lo dicho se deduce que si desde dos puntos obtenemos dos fotografías simultáneas de un mismo cuerpo, y medimos la longitud e inclinación de la recta que une los centros ópticos de los objetivos de las dos cámaras y las inclinaciones y los ángulos que con esta base forman los planos de las dos placas, podremos determinar, por el «método de las intersecciones», todas las magnitudes visibles del cuerpo fotografiado.

Este método, cuyo fundamento teórico ha sido estudiado en los últimos 50 años, primeramente por el general Terrero, y luego por Hauck, Schiffner, Dolezal y otros, y cuyos detalles de aplicación *se deben, principalmente, al coronel francés Aimé Laussedat, ha entrado completamente en los dominios de la práctica corriente de la Topografía y presta excelentes servicios en múltiples ramas de la Ciencia y de la Técnica modernas.

La visión humana no es, en definitiva, sino la aplicación de un caso particular del «método de intersecciones». Cada uno de los ojos es una cámara clara, y en él se forma una radiación o haz de rectas: la intersección de cada par de éstas, correspondientes a un mismo punto del objeto que miramos, forma la imagen de aquél; y si cerramos un instante los ojos, esos dos haces de rectas, que se conservan unos instantes por la memoria óptica, nos permiten, por cierto tiempo, seguir viendo el objeto.

La única particularidad que este caso presenta consiste en que los planos en que se dibujan las dos perspectivas, que antes tenían una posición cualquiera, son ahora próximamente paralelos, ya que pueden considerarse como tales los tangentes a la superficie sensible del ojo, en los puntos en que se forman las imágenes de aquel a que dirigimos nuestra vista. Y no es otra cosa la teoría del «método de paralajes», fundamento de la Fotogrametría estereoscópica o Estereofotogrametría.

Veamos ahora cómo pueden deducirse las dimensiones de un objeto, teniendo de él dos fotografías sobre dos placas paralelas (en el instante de ser impresionadas); es decir, cómo podemos realizar, por procedimientos geométricos, lo que instintivamente hacemos al dirigir nuestra vista a un objeto cualquiera.

Notemos, ante todo, que la determinación, por el método de intersecciones o por su caso particular el de paralajes, de la distancia a que de nosotros se encuentra un punto cualquiera, tiene por base la intersección de dos visuales o rayos proyectantes, y que ésta sólo se presentará en buenas condiciones de exactitud cuando el punto se encuentre comprendido en cierta zona, en la que el ángulo de aquéllas no sea extremadamente pequeño. Y, en efecto, la cotidiana experiencia nos enseña que los puntos situados a cierta distancia de nosotros (de 450 metros en adelante para las vistas ordinarias) aparecen ya en un plano, sin producir sensación de relieve, y a esto debe atribuirse el efecto que nos producen los dioramas y reproducciones de paisajes con horizontes dilatados: no es que percibamos su relieve — como solemos decir — sino que

lo vemos sin él, como en la realidad, y juzgamos con acierto que no hay diferencia sensible entre ésta y su imagen.

II. — DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DE UN PUNTO POR SU PARALAJE

Supondremos, primero, que los dos centros de estación se hallan a la misma altura, toda vez que, según veremos más adelante, a éste puede reducirse el caso en que tal condición no se verifique.

a) Caso en que las dos placas se hallan en un mismo plano.

Sean, en este supuesto, $p-p'$ (fig. 1) el plano que ha de contener las perspecti-

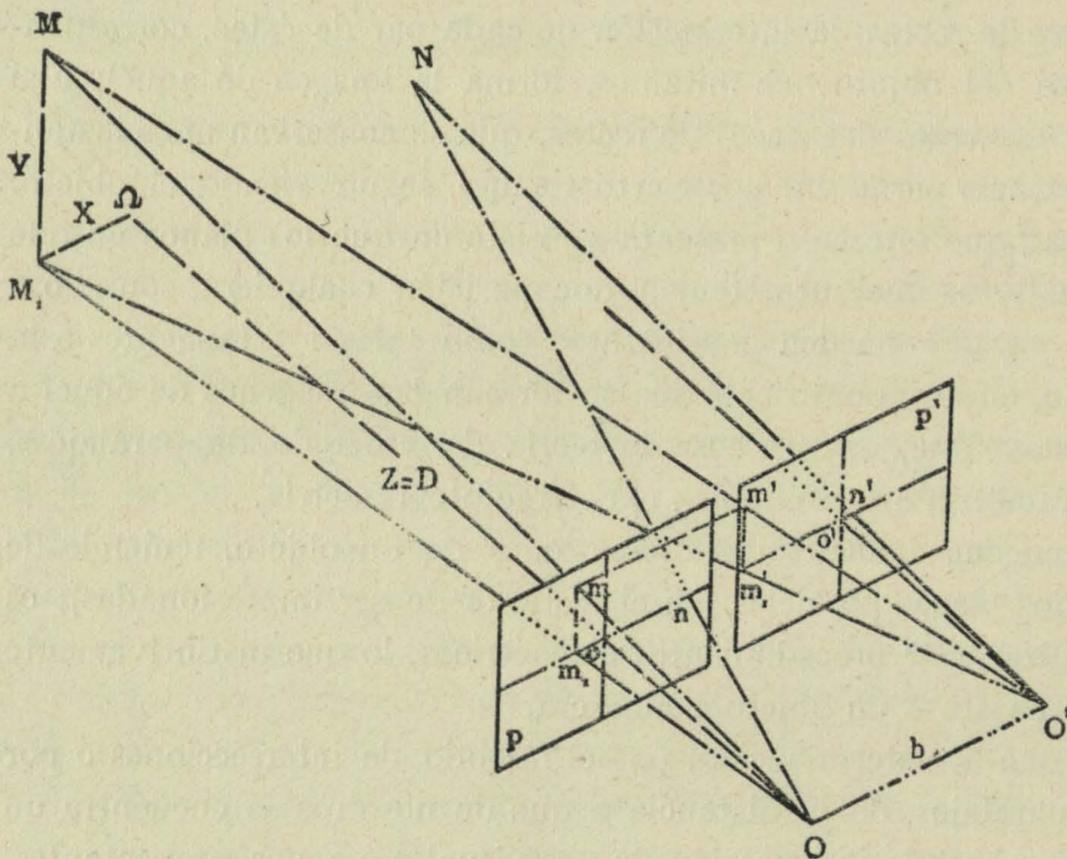


Fig. 1

vas, O y O' los centros de proyección (los ojos del observador o los objetivos de las dos cámaras fotográficas), o y o' sus proyecciones ortogonales obre aquel plano, y oo', por tanto, la intersección de éste con el horizontal que pasa por O y O', es decir, la recta de horizonte de las perspectivas.

Las imágenes de un punto cualquiera M serán las trazas m y m' de p y p' respectivamente, con las rectas OM y O'M: y por

hallarse éstas en planos que pasan por OO' (cualquiera que sea el punto M), los pares de imágenes m y m' estarán a alturas iguales sobre la recta de horizonte oo'.

Consideremos ahora un punto M, situado a la misma altura que los O y O': sus imágenes m y m' estarán en la recta de horizonte, y podremos fácilmente determinar la separación mm' de éstos, conociendo la distancia D de aquél a la vista del observa-

Si observamos que, por ser iguales los ángulos OMO' y mOm_1 , para un punto cualquiera, lo serán también para el pie N de la perpendicular trazada por el punto O' al plano de paralaje π , y que para esta posición especial las razones $\frac{b}{D}$ y $\frac{\pi}{f}$ representan la tangente trigonométrica del ángulo correspondiente ONO' (1) o de su igual oOn_1 , y, finalmente, que podemos hacer $f=1$ tomando el plano de las imágenes estereoscópicas a distancia unidad de los centros O y O' , en cuyo caso aquella tangente viene representada por la paralaje lineal π , ya definida, podremos fácilmente darnos cuenta de la equivalencia que existe entre ésta y la paralaje angular de que se sirven los astrónomos para determinar las distancias a que de nosotros se encuentran algunos astros.

Defínese esta paralaje, para cada astro, como ángulo bajo el cual se vería desde su centro un diámetro de la tierra o el eje mayor de la órbita elíptica que ésta recorre. Los extremos de una u otra de estas magnitudes son, respectivamente, los extremos de la base OO' que se elige para la observación estereoscópica de aquellos astros en la revolución diurna o en la ánuca de nuestro planeta. Y como en Astronomía los valores de esta paralaje angular son casi siempre muy pequeños, podemos substituirlos por las respectivas tangentes trigonométricas o paralajes lineales.

Conocida ya, por los anteriores razonamientos, la distancia a que el plano de frente que pasa por el punto en cuestión M se encuentra de los puntos de estación (fig. 1), podemos determinar la posición de éste en aquel plano, referida a las trazas que en él producen el plano de horizonte y el perpendicular a él por el punto central de la placa p , que llamaremos plano principal de ésta, como ejes de abscisas y ordenadas. Los valores de las coordenadas X e Y del punto M resultan sencillamente de la semejanza de las pirámides triangulares $O.\Omega MM_1$ y $O.omm_1$, que nos da

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{OM}{Om} = \frac{D}{f},$$

y como, según hemos visto,

$$\frac{D}{f} = \frac{b}{\pi},$$

resulta que basta medir las magnitudes b y f , y en la placa p las coordenadas x e y de la imagen m , para tener completamente conocida la posición del punto elegido M .

(1) Es evidente que este ángulo no se conserva constante para todos los puntos de un plano de frente, pues el lugar geométrico de los puntos del espacio que gozan de aquella propiedad es una superficie tórica, cuya meridiana es el conjunto de los dos arcos capaces del ángulo elegido, sobre el segmento OO' .

y substituyendo este valor en el de la base buscada

$$Oe = b \cos \beta + b \operatorname{sen} \beta \frac{x'}{f}$$

Más adelante veremos que este valor de la base ficticia que para cada punto hay que tomar, se obtiene automáticamente, sin necesidad de cálculo alguno, con el modelo 1911 del estereoautógrafo.

c) *Caso en que las dos placas, conservándose siempre verticales, no son paralelas entre sí, pero una de ellas lo es a la base.*

Siendo práctico el carácter de esta exposición, y su principal objeto el preparar la inteligencia del fundamento y uso del estereoautógrafo, comenzaremos por dar un

medio mecánico de reducir este caso al primero de los anteriores, tal como lo efectúa el aparato citado.

Sean p y p'' (fig. 4) las dos placas, O y O' los centros de estación y OO' la base estereoscópica, paralela a la placa p . Consideremos, además, otra placa ficticia p' en el plano de la p .

Un punto cualquiera M tiene sus imágenes m y m'' en p y p'' : su imagen en p' sería m'_1 .

Si, para poder medir en las placas abscisas y paralajes, hiciéramos girar la p'' hasta colocarla en la posición p' , veríamos que, en lugar del punto

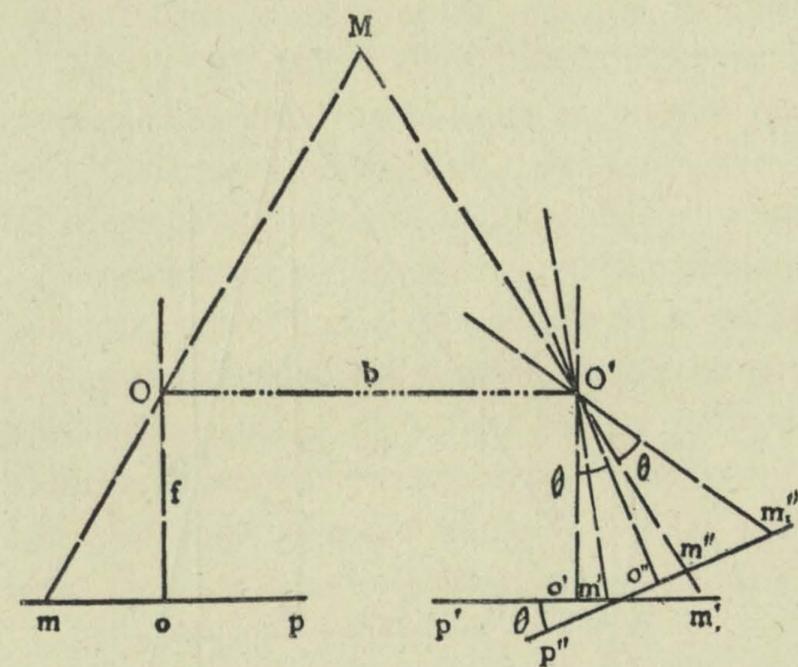


Fig. 4

m' , al que habría venido a parar el m'' después del giro, sería el m'_1 , el que habríamos de considerar como imagen de M en la placa p' .

Es decir, que la teoría del caso a) sería aplicable al que nos ocupa, si la imagen del punto M , en lugar de formarse en m'' , lo hubiera hecho en m''_1 (siendo $o''m''_1 = o'm'_1$): o sea, que el rayo $MO'm''$ se hubiere quebrado en O' , convirtiéndose en el $MO'm''_1$. El ángulo $m''O'm''_1$, en que este rayo se ha quebrado es, por la identidad de los triángulos $O'o'm'_1$ y $O'o''m''_1$, igual al $o'O'o''$, que es el de las placas p' y p'' , o, lo que es igual, de las placas estudiadas p y p'' . Este ángulo es constante para todos los puntos M que se consideren.

Luego, si materializamos el rayo proyectante MO en una varilla recta, giratoria alrededor de O, y el MO'm'', en otra varilla que gire alrededor de O', quebrándose en este punto en un ángulo igual al que forman las placas, podremos colocar éstas en un plano, paralelo a la base b, y medir las paralajes de los diversos puntos y obtener de éstos las distancias de aquéllos.

Con lo anterior basta, como hemos dicho, para la resolución mecánica del problema en el caso que nos ocupa.

Para la analítica observemos que en la placa p' hay que tomar la abscisa

$$x_i = o'm'_i = f \operatorname{tg} o'O'm'_i.$$

El ángulo $o'O'm'_i$ es suma de los $o'O'o''$ y $o''O'm'_i$; el $o'O'o'' = \theta$ es el ángulo constante que forman las dos placas, y el $o''O'm'_i$ tiene por tangente el valor $\frac{x'}{f}$.

Aplicando la fórmula de la tangente del ángulo suma de otros dos, tendremos

$$x_i = f \operatorname{tg} \left(\theta + \operatorname{áng} \operatorname{tg} \frac{x'}{f} \right) = f \frac{\operatorname{tg} \theta + \frac{x'}{f}}{1 - \frac{x'}{f} \operatorname{tg} \theta} = f \frac{x' + f \operatorname{tg} \theta}{f - x' \operatorname{tg} \theta}.$$

Tomando como paralaje el valor $\pi = x - x_i$, en que x_i es la función de x' que acabamos de hallar, serán aplicables a este caso las fórmulas del primero que hemos estudiado.

d) *Caso en que las dos placas no son paralelas entre sí, ni a la base.*

Sean p y p' las dos placas (fig. 5), y O y O' los correspondientes centros de proyección.

Dando a la placa p'' un giro alrededor de O' hasta colocarla paralela a la p, efectuaremos la corrección del caso c) en las abscisas de la placa p'. Tendremos ya reducido el caso que nos ocupa al caso b).

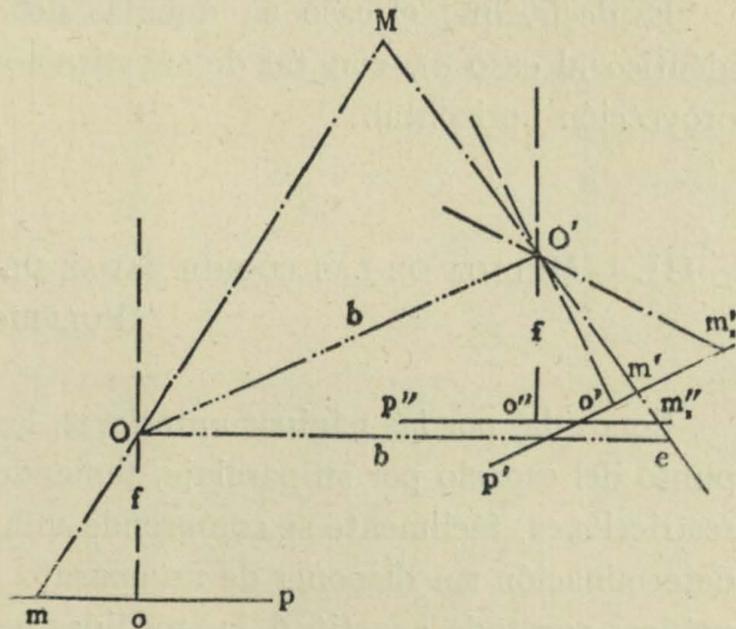


Fig. 5

e) *Caso en que, estando los planos de las placas en cualquier posición relativa, los centros de estación se hallan a alturas diferentes.*

Observemos, en primer lugar, que la determinación de las coordenadas X e Y de los diferentes puntos depende sólo de elementos que se miden en la placa de la izquierda. La única diferencia entre este caso y el anterior podrá estar, pues, en la determinación de la distancia $Z=D$, en función de la paralaje.

Pero ésta depende exclusivamente, según hemos visto, de la distancia que separa las verticales de las proyecciones m y m' , de la base b y de la distancia focal f .

Si, quedando fija una de las placas, la p , por ejemplo, se desplaza la otra verticalmente, sin salirse de su plano, y ocupa diversas posiciones p' , p'' ..., tanto f como la paralaje π permanecen constantes, y sólo varía la base b , que tiene, no obstante, invariable su proyección horizontal (fig. 6).

La expresión de la distancia

$$D=bf \frac{1}{\pi}$$

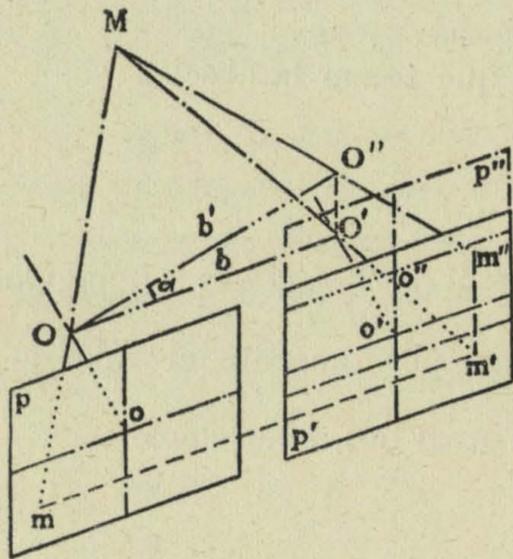


Fig. 6

puede aplicarse a cualquiera de las posiciones de la placa móvil, substituyendo b por sus valores

$$b' \cos \alpha' = b'' \cos \alpha'' = \dots$$

Es decir, que el caso en que las dos estaciones no están a la misma altura es idéntico al caso a), con tal de substituir el verdadero valor de la base por el de su proyección horizontal.

III. — MEDIDA DE LAS COORDENADAS DE UN PUNTO CON EL ESTEREOCOMPARADOR PULFRICH-ZEISS

Conocida, por las páginas anteriores, la posibilidad de determinar la posición de un punto del espacio por su paralaje, teniendo dos fotografías de él, obtenidas con ciertas restricciones, fácilmente se comprende que no podría realizarse prácticamente aquella determinación sin disponer de un aparato que nos permita obtener en las placas fotográficas con toda exactitud, las medidas necesarias.

Este aparato ha sido proyectado por el Dr. Carlos Pulfrich, Jefe de la Sección de Aparatos de Medida en la conocida Casa Zeiss, de Jena, en Alemania.

Entre los diferentes modelos que, para distintos usos, ha construído la citada Casa, nos limitaremos ahora a describir el modelo E, especial para trabajos topográficos.

Como puede verse en la figura 7 (cuyo clisé ha sido cedido por la casa Zeiss

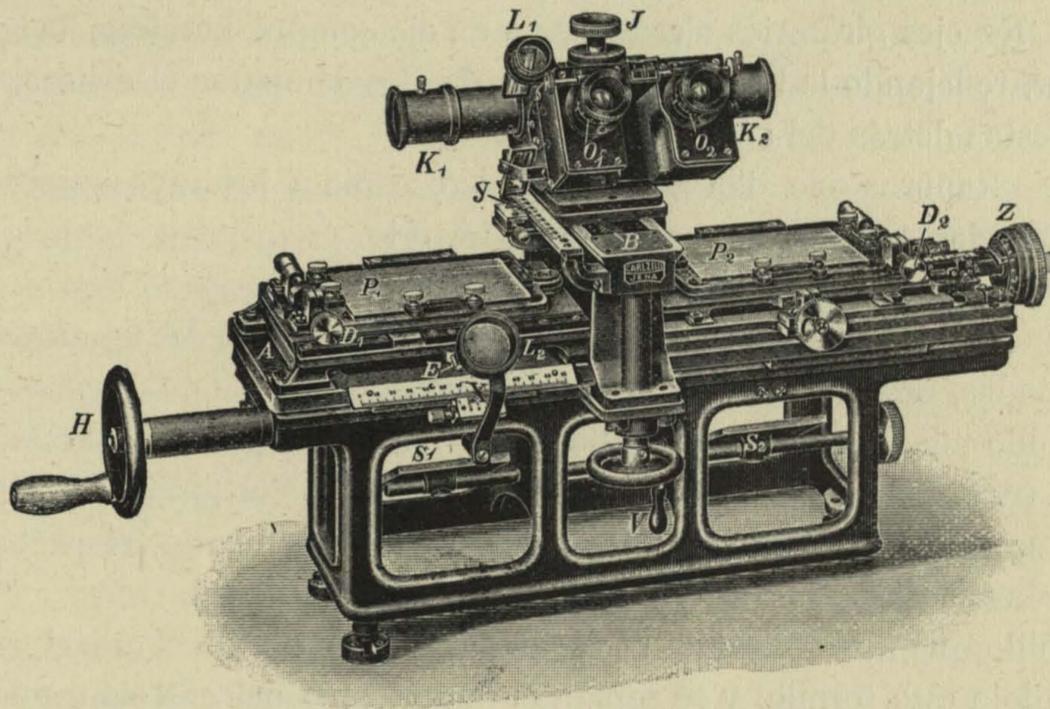


Fig. 7

para la impresión de este trabajo), el Estereocomparador consta de dos partes principales: 1.^a, el soporte de las placas, y 2.^a, el microscopio binocular (aumento de 6 a 8 diámetros), cuyo esquema puede verse en la figura 8.

Para la descripción del aparato nos serviremos de las letras que ilustran la figura.

A. Primer carretón principal, que lleva las dos placas P_1 y P_2 y se mueve transversalmente por medio de la manivela H. Este movimiento se mide en la escala x , la cual, con su nonius, permite apreciar $0^m,0001$.

B. Segundo carretón principal, móvil en dirección perpendicular a la anterior, que lleva el estereomicroscopio y se mueve por medio de la manivela V. La escala correspondiente y , aprecia, como la anterior, $0^m,0001$.

C. Tornillo de ajuste, para igualar

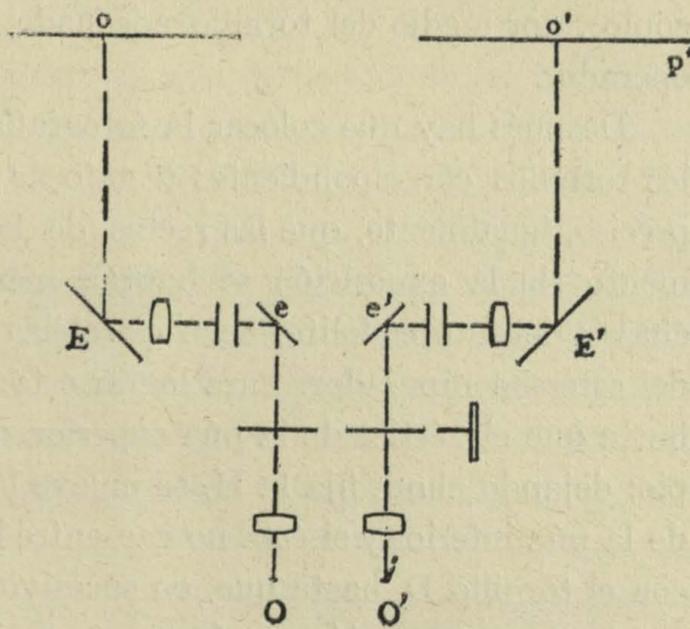


Fig. 8

las diferencias de altura entre los centros de las placas, procedentes de una diferencia de nivel entre los dos puntos de estación de las vistas fotográficas.

D_1 y D_2 . Tornillos que permiten un pequeño giro de las placas en su plano.

E. Cerrojo que fija el carretón de la placa P_1 , móvil en dirección del carretón A.

S_1 y S_2 . Espejos giratorios alrededor de un eje común: iluminan las placas por su parte inferior, reflejando la luz del día, o la de dos lámparas eléctricas, convenientemente dispuestas detrás del aparato.

K_1 y K_2 . Ranuras que dan acceso al microscopio a los rayos procedentes de las fotografías. Pueden taparse con un cilindro giratorio.

F. Tornillo para el ajuste óptico del microscopio.

L_1 y L_2 . Lentes para facilitar la lectura de divisiones en las escalas x e y , de abscisas y ordenadas, provistas de sus nonius correspondientes.

Z. Tornillo micrométrico, de tambor móvil, para la medida de paralajes: está dividido en 100 partes, y con la escala situada a la derecha del tornillo P_2 , que lo está en milímetros, aprecia $0^m,00001$ da a la placa p_2 un movimiento, respecto de la p_1 , en dirección de las abscisas.

J. Tornillo que fija el estereomicroscopio al carretón B. Para el transporte del aparato se afloja este tornillo y se separa el microscopio del carretón, pudiendo embalsarse en dos estuches apropiados.

Conocidos ya los elementos de que consta el estereocomparador, pasemos a ocuparnos de su empleo.

Comenzaremos por ajustar independientemente cada microscopio a la vista del observador hasta que los dos trazos verticales que en el campo de cada uno de éstos se observan, estén a la distancia de la visión distinta, y separar o aproximar los dos microscopios, por medio del tornillo adecuado, hasta que su distancia sea la de los ojos del operador.

Después hay que colocar la fotografía de la izquierda en su sitio, sujetándola con los tornillos correspondientes y enfocar sobre ella el microscopio del mismo lado. Es preciso, igualmente, que las rectas de horizonte y principal de la placa, que en el momento de la exposición se habrán marcado por cuatro púas de que va provisto el chasis del fototeodolito, sean paralelas a las direcciones de los desplazamientos x e y del estereocomparador. Para lograr esto, se mueve la placa P_1 con las manivelas H y V hasta que el vértice de la púa superior quede entre los trazos del campo del microscopio: dejando ahora fija la H, se mueve la V hasta que el retículo se coloque a la altura de la púa inferior y si ésta no cae entre los dos trazos se corrige la posición de la placa con el tornillo D_1 hasta que, en sucesivos tanteos, se cumpla esta condición.

Análoga corrección se efectuará con la otra placa. Claro es que, siendo las rectas de

horizonte de las dos placas, por construcción, perpendiculares a las principales respectivas, si éstas se colocaban paralelas a la dirección de las ordenadas y , aquéllas resultarán paralelas a las abscisas x .

Si las estaciones desde las cuales se obtuvieron en el campo las dos fotografías se hubieran hallado a la misma altura, las rectas de horizonte de las dos placas habrían de ser prolongación una de otra, lo cual se conseguiría por medio del tornillo de ajuste C, que sube o baja la de la derecha. Pero, por regla general, esto no sucede, y como es indispensable, para la observación estereoscópica por medio del aparato, que se hallen a la misma altura las imágenes de cada punto sobre las dos placas, hay que efectuar una nueva corrección que consiste en colocar un punto bien definido de la placa de la izquierda bajo el trazo del retículo correspondiente, y accionar el tornillo C hasta que la imagen del mismo en la otra placa caiga bajo el mismo trazo del retículo derecho. En esta disposición, el punto enfocado y el retículo aparecerán superpuestos y con relieve.

Colocadas las dos placas con el desnivel (reducido en la misma escala que la base) con que en el terreno se impresionaron, los pares de rayos proyectantes que a cada punto corresponden, se cortan en éste y, por cumplirse tal condición, se verá de relieve el paisaje que las fotografías reproducen.

Si una de éstas se sube o baja hasta que esté a la altura de la otra, las proyectantes de cada punto serán rectas que se cruzan, y el efecto de relieve habrá desaparecido, en general.

Parece, pues, que la corrección de igualación de alturas que acabamos de explicar, imposibilitaría la observación estereoscópica de las vistas: en la práctica no obstante, esto no sucede porque, siendo despreciable la diferencia de alturas entre los dos extremos de la base, comparada con las distancias a que de ésta se hallan los puntos que en el paisaje aparecen, la vista de éste sacada desde una de las estaciones y la obtenida desde el punto de la vertical de esta estación situado a la misma altura que la otra (que es la que teóricamente habría de colocarse en el estereocomparador) resulta inapreciable.

Réstanos tan sólo, para tener el aparato dispuesto para el trabajo, conocer las lecturas que en las escalas de abscisas y ordenadas da el centro del retículo de la izquierda apuntando a un punto de la recta principal y uno de la de horizonte, respectivamente; y la que se hace en la escala de paralajes cuando los centros de los dos retículos caen en las rectas principales correspondientes. Estas tres lecturas, que se hacen después de colocadas las dos placas en sus posiciones debidas, con arreglo a las precedentes correcciones, son las constantes que han de restarse de las abscisas, ordenadas y paralajes de cada punto, respectivamente, para tener las x , y y π de sus imágenes.

Pueden emplearse en el estereocomparador las negativas sacadas en el campo, o positivas de éstas, obtenidas en cristal para poderlas observar iluminadas por transparencia con los espejos S_1 y S_2 : unas y otras se colocarán de modo que el terreno aparezca en cada fotografía tal como se veía desde la estación en que se obtuvo; es decir, las negativas con la gelatina hacia abajo y las diapositivas con la gelatina hacia arriba. El empleo de las negativas es preferible al de las positivas, por ser más rápido y exacto y porque la experiencia demuestra que el operador se acostumbra muy pronto a ver el relieve del terreno con la iluminación invertida.

Medidas en el estereocomparador las magnitudes x , y y π , correspondientes a cada punto, fácil es deducir de ellas, por medio de las fórmulas que en las páginas anteriores consignamos, sus coordenadas X , Y , $Z=D$. La primera y la última dan la proyección horizontal del punto, a cuyo lado se escribe la altura Y , y repitiendo esta operación

para los principales, pueden luego interpolarse entre ellas las curvas de nivel que se deseen. Claro es que las alturas Y se refieren, como origen, a la estación de la izquierda y, para convertirlas en absolutas, es preciso agregarles, como término constante de corrección, la altura absoluta de la estación citada.

Para poder observar con más claridad el relieve del terreno puede substituirse el microscopio binocular por un estereoscopio de espejos, representado esquemáticamente en la figura 9.

Las fotografías, colocadas en p y p' se reflejan doblemente en los pares de espejos paralelos E , e y E' , e' y sus imágenes, amplificadas convenientemente al atravesar las lentes oculares, se superponen en v , produciendo una imagen en relieve del terreno que se quiere observar.

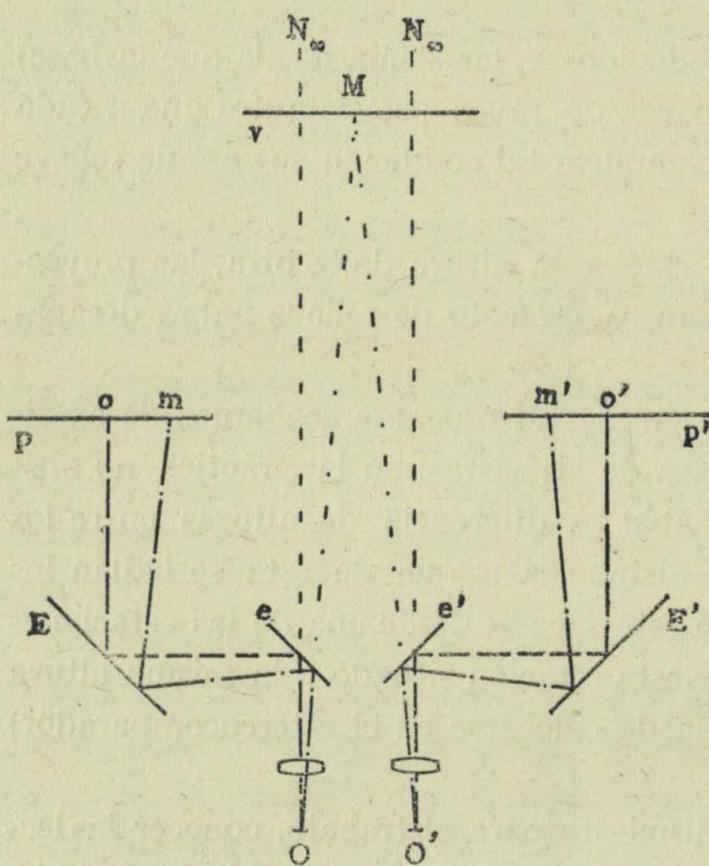


Fig. 9

Lo mismo que en el microscopio, pueden hacerse en el estereoscopio las correcciones de adaptación a la vista del operador y a la separación de sus ojos.

El modo práctico de emplear el estereocomparador se deduce sin dificultad de lo anteriormente expuesto.

Al mirar por el estereoscopio veremos en el espacio la imagen virtual que producen los estiletes situados en el campo de cada uno de los oculares: esa imagen del estilete aparecerá siempre a distancia constante.

Colocadas en el aparato dos placas, en la forma ya explicada, veremos de relieve el paisaje que representan. Para efectuar las medidas que corresponden a un punto cualquiera M, del terreno, hay que llevar la imagen m' de éste en la placa de la izquierda bajo el estilete del mismo lado, lo cual se conseguirá combinando los movimientos horizontal y vertical producidos con las manivelas H y V: con esto podrán ya leerse los valores de x e y en las correspondientes escalas. Accionando ahora la manivela Z se aproximará o alejará el paisaje, hasta que sobre él descansa el estilete: entonces podremos ya leer el valor de la paralaje π .

Con los valores de π , x e y , calcularemos las coordenadas del punto elegido M.

En la práctica no se efectúan sucesivamente los movimientos que acabamos de explicar. Teniendo el estilete sobre un punto M del terreno, a un tiempo se realiza el desplazamiento lateral y de altura de éste, y su aproximación o alejamiento. De modo que el estilete no deja de apoyarse sobre la superficie del paisaje, sino que recorre ésta para pasar de uno a otro de sus puntos. Esto es indispensable, como luego veremos, para el trazado de curvas de nivel en el estereoautógrafo.

Creemos que basta lo expuesto para poder comprender sin dificultad la descripción y empleo de este aparato, que constituyen el objeto principal del presente Trabajo: el que, sobre el Estereocomparador en particular y sobre la Estereofotogrametría en general desee más datos, puede hallarlos en nuestro folleto: «Aplicaciones Métricas de la Estereoscopia. — Madrid, 1909».

PARTE SEGUNDA

Descripción y uso del Estereoautógrafo

I. — IDEA DEL ESTEREOAUTÓGRAFO

Hemos visto en las anteriores páginas la posibilidad de deducir las tres coordenadas de cada punto de un objeto, de ciertas mediciones efectuadas en dos fotografías del mismo, y hemos descrito un aparato que realiza estas mediciones con gran exactitud.

Las ecuaciones que dan los valores de X, Y y Z son muy sencillas, pero su repe-

tición para cientos y miles de puntos es sumamente pesada y expuesta a fáciles equivocaciones.

Varios métodos gráficos se han propuesto para resolver estas ecuaciones con reglas y escuadras convenientemente dispuestas, pero hay que reconocer — y así lo vió desde el primer momento el capitán von Orel — que sería altamente práctico un aparato que realizara mecánicamente estos sencillos cálculos, suprimiendo casi por entero la intervención del operador: éste es el primer trabajo que el Estereoautógrafo realiza.

La circunstancia de que a cada punto del objeto fotografiado corresponde una sola posición de las correderas del Estereocomparador, cuando se hace coincidir el índice de éste con la imagen de aquél, en el relieve aparente que el aparato produce, hizo pensar a von Orel en la posibilidad de construir un instrumento que, guiado por el Estereocomparador, dibujara automáticamente el plano del objeto.

Este instrumento es el que, después de breve evolución, ha logrado recientemente dar el dibujo automático, por curvas de nivel, de un objeto cualquiera.

II. — PRIMER MODELO DEL ESTEREOAUTÓGRAFO

Apenas lanzada al mundo técnico la idea de aplicar a la reproducción óptica de objetos el método de las paralajes, el Instituto Geográfico Militar Austriaco le dedicó atención muy preferente. Adquirió uno de los primeros fototeodolitos, que para trabajos estereofotogramétricos salieron de los talleres de Zeiss, y un estereocomparador Pulfrich, y con ellos realiza continuos trabajos en regiones montañosas, desde 1905, obteniendo resultados altamente satisfactorios.

En 1908 la experiencia había ya demostrado que era indispensable dotar al nuevo método de medios auxiliares, rápidos a la vez que exactos, para simplificar los trabajos de gabinete, cuya lentitud contrastaba notablemente con la rapidez de los de campo. Como el problema mecánico más difícil es, desde luego, el de buscar automáticamente la distancia del plano de frente en que se halla el punto cuya posición queremos determinar, lo primero que se procuró fué construir la fórmula de la distancia normal

$$D = \frac{bf}{\pi}$$

Redúcese ésta a la formación de dos triángulos semejantes: pero siendo ordinariamente pequeño el ángulo con que se encuentran las dos rectas que por su intersección

fijan el punto en el plano, esta intersección queda mal determinada. Para remediar tal inconveniente basta multiplicar la base b , en la fórmula anterior, por un número cualquiera, y dividir por el mismo la distancia focal f , o sea, escribir

$$\frac{D}{bm} = \frac{f}{\pi}$$

y construir esta expresión con el aparato citado, cuyo esquema representa la figura 10.

Las figuras 11, 12 y 13 dan perfecta idea de este tipo primitivo del constructor. La parte superior del soporte del estereocomparador (1) sostiene un tablero inclinado Z , colocado lateralmente y perpendicular al plano de las placas. En A lleva el tablero una deslizadera por medio de la cual el movimiento del índice de la placa de la derecha se transmite al constructor. Este movimiento hace, a su vez, avanzar o retroceder a la abrazadera S que, al mismo tiempo que por la regla giratoria, desliza por la escala fija de distancias E donde, con auxilio de una lente, se lee en P la distancia buscada, y se marca la posición del punto oprimiendo un lápiz sostenido por un pequeño resorte.

El punto que así hemos marcado en la recta E es la traza de ésta con el plano de frente que contiene el punto buscado: la proyección de este punto en el tablero deberá hallarse sobre la perpendicular a E trazada por P . La otra recta que con ésta ha de determinarla, no es la materializada por la otra varilla, sino que exige un órgano especial. Éste se halla constituido por una palanca acodada, giratoria alrededor de un eje que materializa la estación de la izquierda, y se halla unido a la deslizadera principal A , a la distancia focal natural f de la cámara, con lo cual el ángulo de esta palanca con la deslizadera será, en cualquiera de sus posiciones, el ángulo de dirección deseado, y la recta que el brazo móvil de la palanca acodada traza sobre el papel corta a la recta antes obtenida en el punto buscado.

Tal fué el primer modelo del constructor cuya necesidad se sentía tan vivamente en la práctica usual del método de las paralajes. Fué construido, en 1908, por la casa Rodolfo y Augusto Rost, de Viena.

Los resultados que con él se obtuvieron fueron altamente satisfactorios, tanto

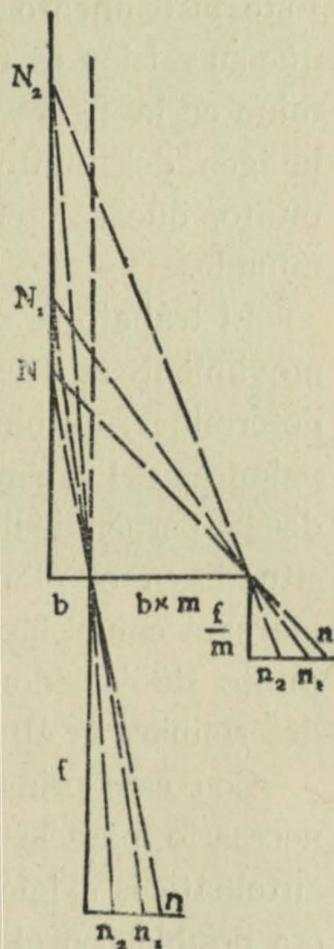


Fig. 10

(1) Este Estereocomparador es del modelo A, análogo aunque no idéntico, al modelo D, que hemos descrito.

desde el punto de vista de la rapidez, como de la exactitud de las operaciones. Pero con él no podían obtenerse sino las proyecciones de los puntos, y para determinar sus alturas era preciso recurrir a otro aparato, manejado por un operador auxiliar. Este instrumento era sumamente sencillo, como puede comprenderse considerando que su misión es tan sólo construir una sencilla proporción, y se ve en primer término en la figura 13: en función de la distancia normal y de la ordenada y de la imagen del punto en la placa de la derecha, determina este aparato la altura del punto, que se escribe junto a la proyección de éste, que anteriormente se ha determinado.

El trabajo se realiza del modo siguiente: el operador hace coincidir, mediante los movimientos del estereocomparador, la imagen del índice con la del punto que quiere determinar: automáticamente habrán sido arrastradas por este movimiento las dos palancas del constructor: la palanca recta moverá la deslizadera S y marcará el pie de la perpendicular a E, en que el punto ha de hallarse, y la acodada se habrá situado en el plano que con E forme el ángulo de orientación. El auxiliar entonces marcará con el lápiz de la deslizadera la recta EE, y con el de la palanca acodada el punto de ésta donde se halla la proyección buscada: con el aparato complementario determinará la altura, y la escribirá junto al punto correspondiente.

Con este primer modelo del estereoautógrafo se reducía a 1 minuto el tiempo necesario para la determinación completa de cada punto, que con los métodos no automáticos exigía de 5 a 8. Y los errores cometidos no pasaban de 0,2^{mm}. También era posible con él la determinación de puntos, aunque las placas no estuviesen en la posición normal que hasta ahora hemos supuesto, es decir, paralelas a la base.

III. — TRABAJOS REALIZADOS CON EL PRIMER MODELO DEL ESTEREOAUTÓGRAFO

En la sesión mensual que el 9 de Abril de 1908 celebró la Sociedad Austriaca de Fotogrametría, su presidente, profesor Dolezal, dió cuenta de este aparato y de los excelentes resultados con él obtenidos.

Vamos a dar también nosotros algunas noticias sobre los trabajos que con él se realizaron en el Instituto Geográfico Militar de Viena.

En la campaña de verano de 1907 se obtuvieron estereofotogramétricamente los datos de campo de una parte de los montes del macizo de Ortler, en Tirol: en la primavera siguiente se terminó el primer modelo del estereoautógrafo, y en el invierno de 1908-09 se construyó con él, automáticamente, el plano de aquella región, a la escala de 1/25000.

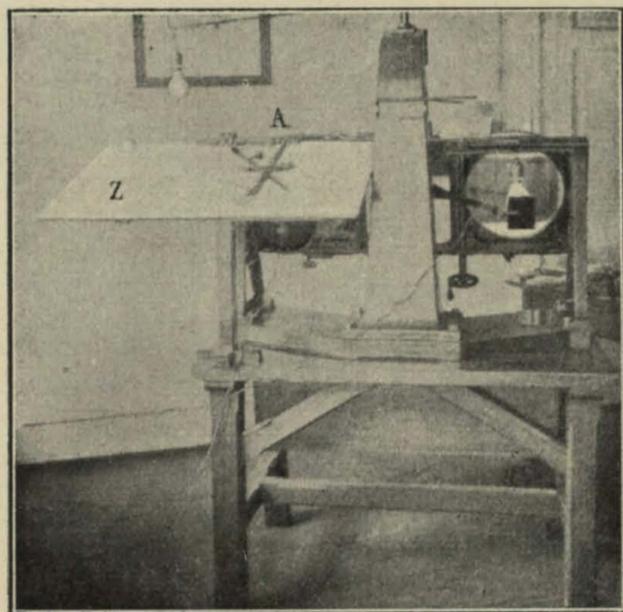


Fig 11

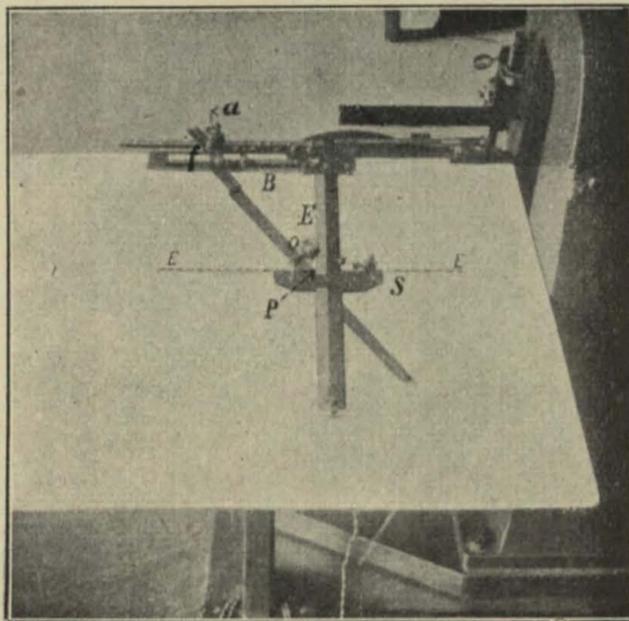


Fig. 12

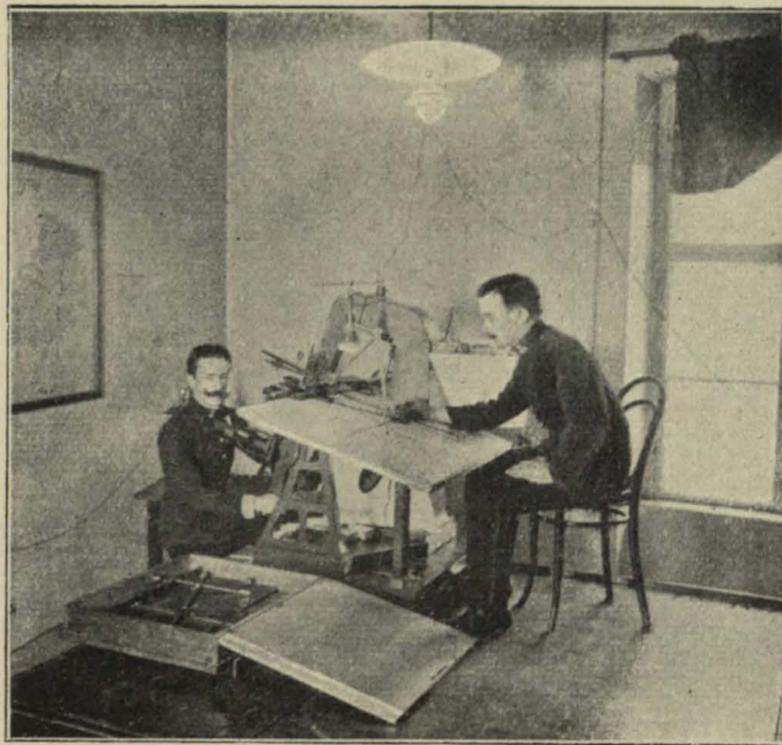


Fig. 13

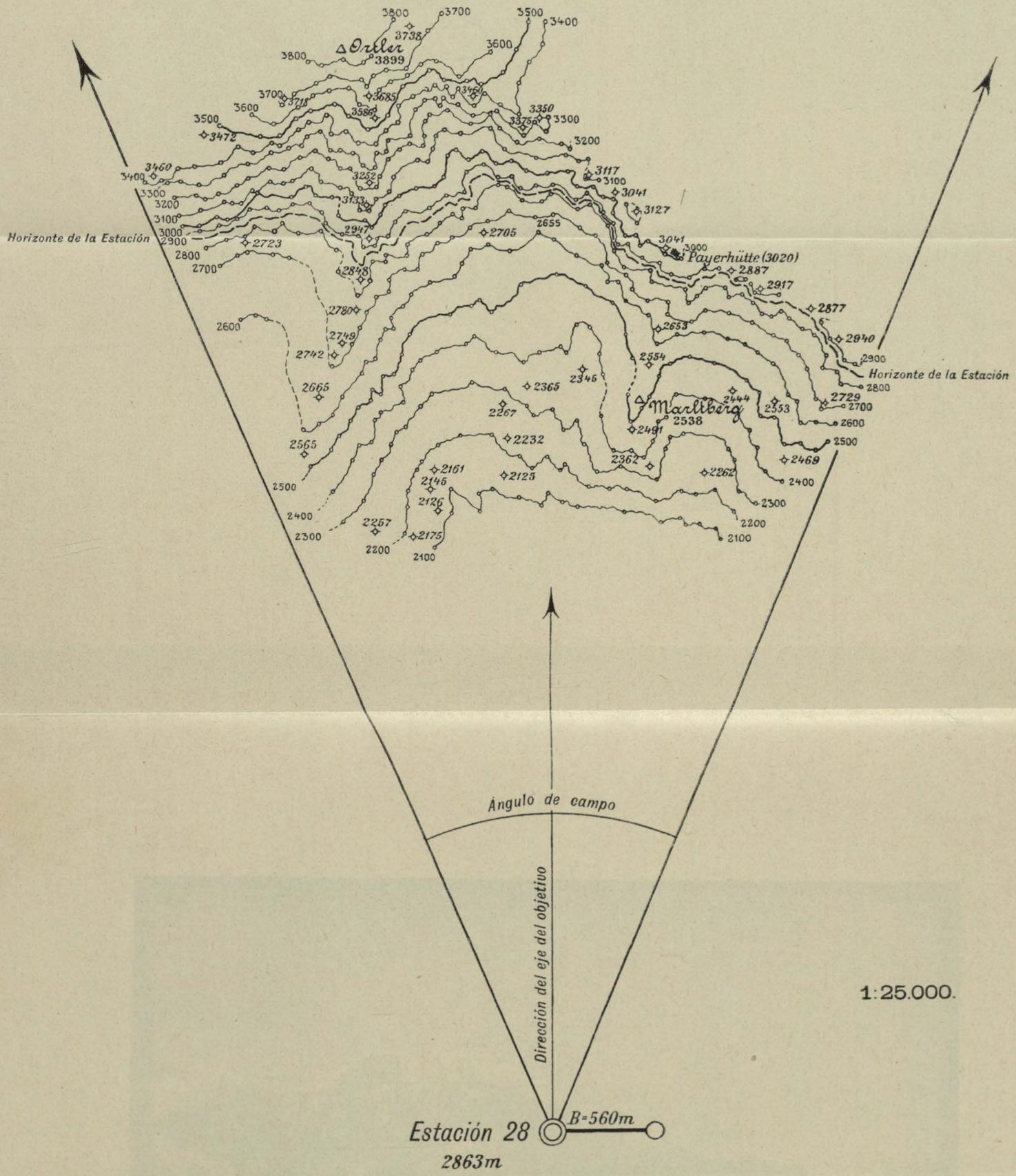
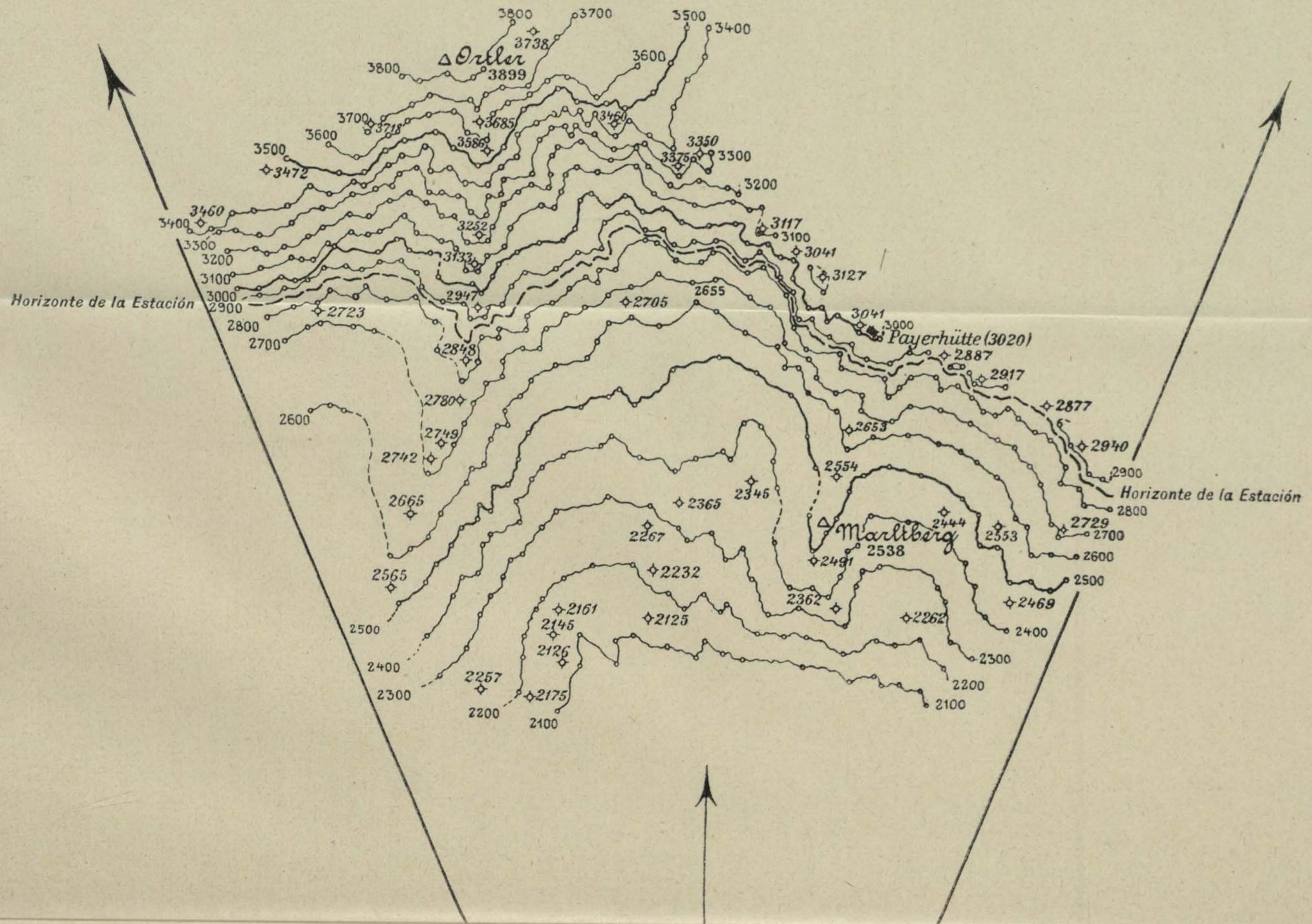


Fig. 14



J. M. Torroja

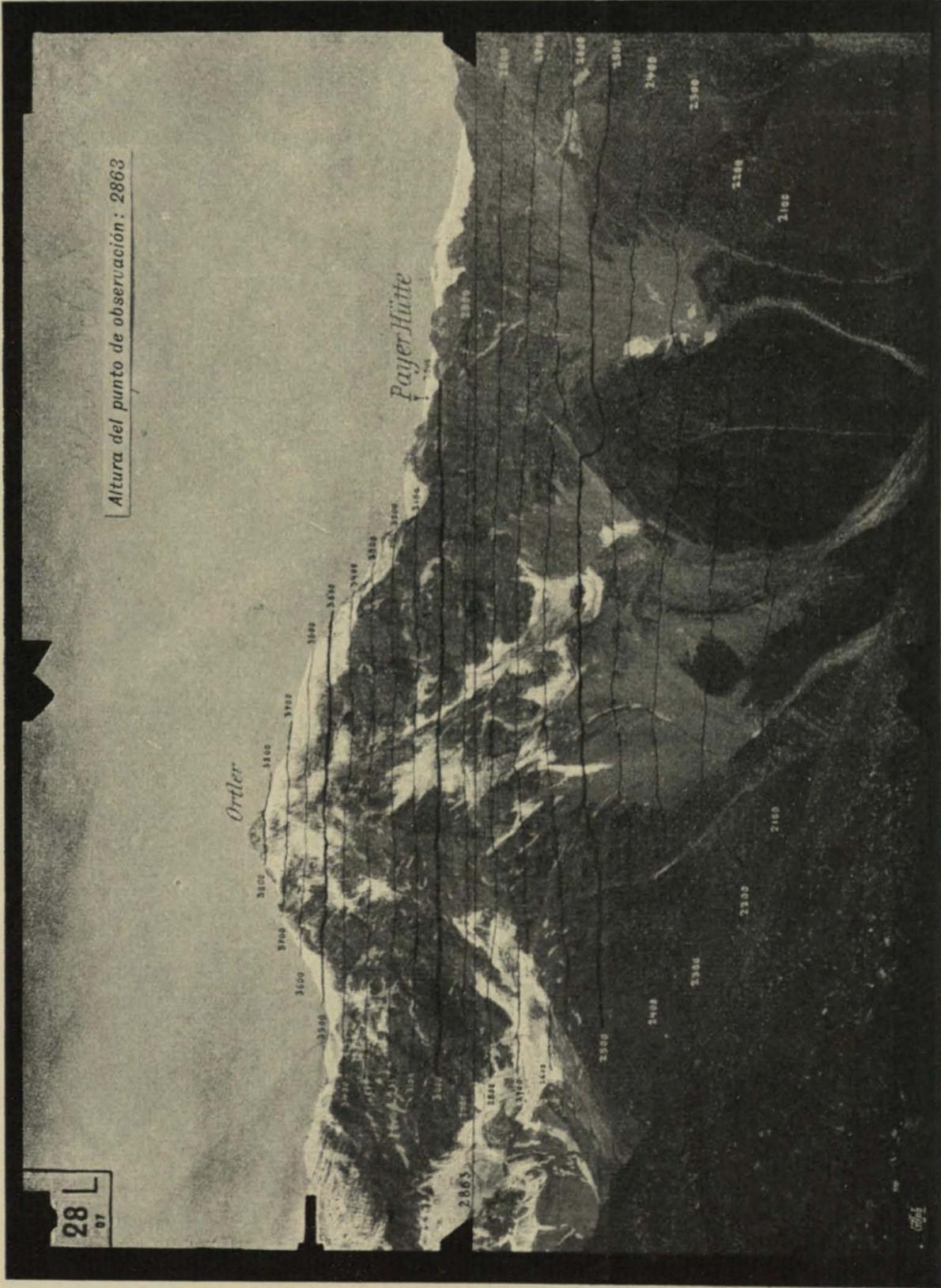


Fig. 15

Arxius de l'Institut de Ciències

23
Schaubachhütte

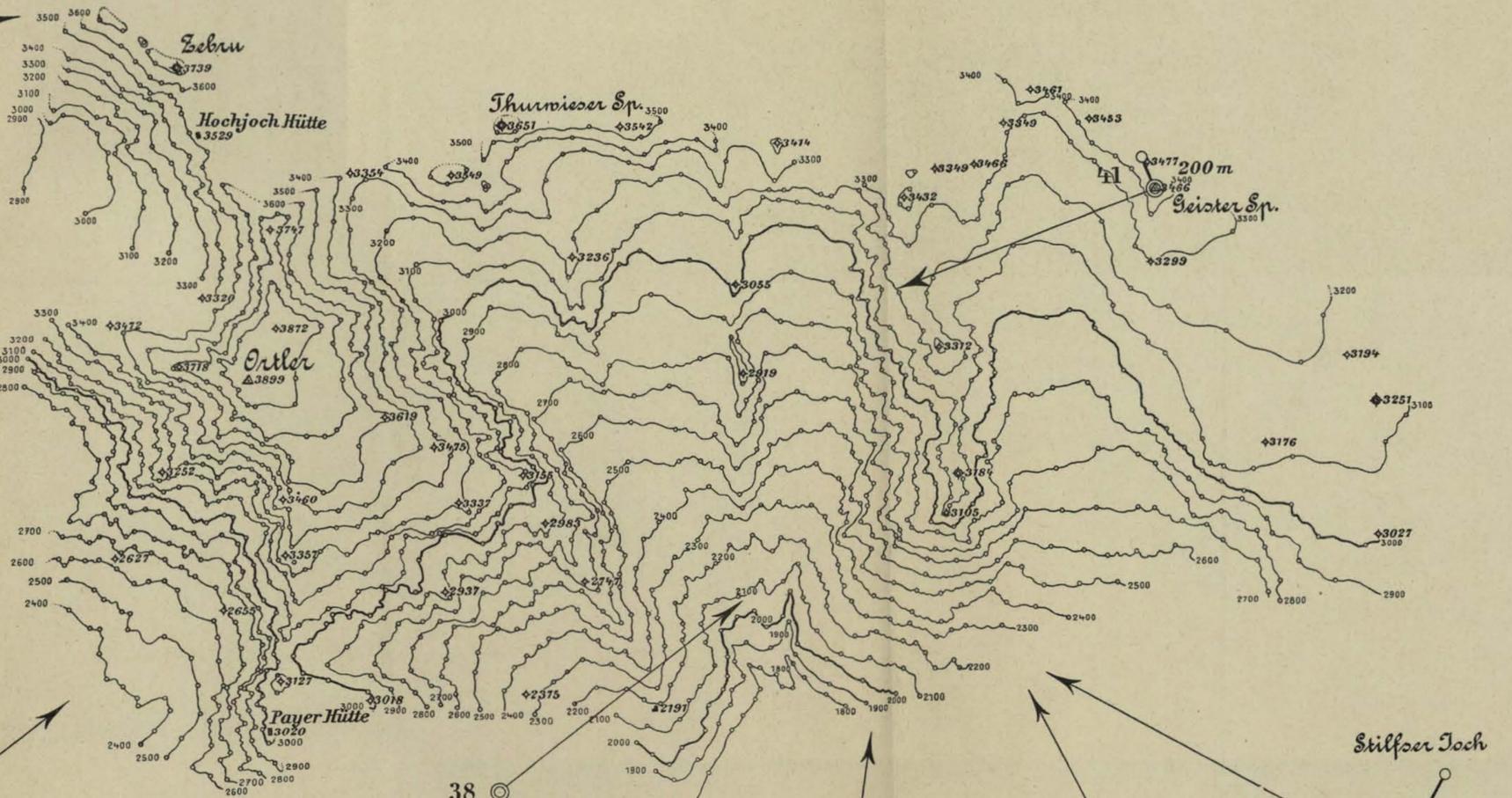
460m



(Sulden)

28 Silber Blais

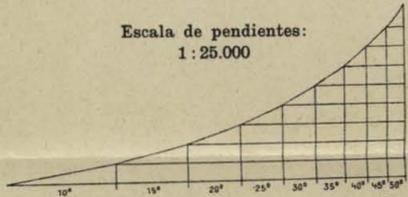
560m



38
Tabaretta Kugel

314m

Escala de pendientes:
1:25.000



(Trafoi)

Stilfser Joch

584m

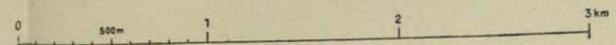
Dreisprachen Spitze

39

564m

Kor Spitze

Escala: 1:25.000



Kleinboden

45

356m

Fig. 16

STATE OF ALABAMA
J. M. TAYLOR

23

1884

1884

1884

El primero de los planos que acompaña a este trabajo (fig. 14), representa la parte del citado plano que se obtuvo desde la estación 28. Aun no era posible, como se ve, obtener por un trazo continuo las curvas de nivel, sino que era preciso determinar uno a uno diferentes puntos situados a la misma altura y unirlos luego por una línea continua; guiándose en los espacios que entre ellos quedan, por el relieve que se observa en el estereoscopio.

La figura 15 contiene el trazado, en perspectiva, de las curvas de nivel, deducidas de los datos del estereocomparador y dibujadas a mano en la placa de la izquierda.

En la figura 16 se ven los resultados obtenidos con el aparato constructor, de los datos de siete estaciones, que representan una extensa zona del macizo citado.

En el verano de 1909 se realizaron los trabajos de campo de la misma región por los métodos taquimétricos, y de ellos se dedujo un nuevo plano para confrontarlo con el anterior: el resultado de esta dura prueba a que se sometía el método estereoscópico y sus aparatos auxiliares no pudo ser más halagüeño y decisivo. El método que acababa de nacer recibía una sanción definitiva, y desde entonces se colocaba a la cabeza de todos los demás para los levantamientos topográficos de regiones montañosas en que se había ensayado (1).

IV. — MODELO 1909 DEL ESTEREOAUTÓGRAFO

Mientras estos trabajos se desarrollaban, el capitán von Orel, animado por sus brillantes resultados, pero no satisfecho aún con ellos, seguía modificando y perfeccionando su aparato para hacerle capaz de llegar al trazado automático de las curvas de nivel, meta que desde el principio se propuso, y a la cual estaba bien cerca de llegar.

Y, en efecto, en el mes de Mayo de 1908 entregó a la casa Zeiss, la misma que había construido el estereocomparador del Dr. Pulfrich, los planos de un nuevo modelo, casi definitivo, de su Estereoautógrafo.

En la figura 17 puede verse un dibujo esquemático de este aparato.

En el modelo 1908 cada punto se determinaba como intersección de dos rectas: en el 1909 el punto quedará marcado directamente por el lápiz. En aquél era preciso escribir al lado de cada punto su cota e interpolar después las curvas de nivel: en éste las curvas se dibujarán directa y automáticamente, y el plano, libre de trazos y números, aparecerá completamente limpio, y podrá dibujarse de una sola vez. Veamos cómo puede lograrse este resultado con el nuevo estereoautógrafo.

(1) Estos trabajos fueron presentados en la Exposición Internacional de Fotografía celebrada en Dresde en 1909, y en la de Medios de Transporte, también internacional, que tuvo lugar el año siguiente en Buenos Aires.

Tal como aparecen las palancas en el citado croquis, corresponden a un punto cuya imagen se halla, en la placa de la izquierda, a la izquierda de la recta principal, a una distancia x_1 y a una altura y_1 sobre la de horizonte: y en la escala adoptada para esta medida, a una distancia D .

Veamos ahora el modo como funcionan los diversos órganos del Estereoautógrafo y del Estereocomparador para dibujar el plano deseado.

Con la manivela H , y su correspondiente tornillo sin fin, puede darse al carretón principal del Estereocomparador (que es el que lleva las dos placas) un movimiento lateral. Con el V puede, simultáneamente, hacerse avanzar o retroceder el microscopio en dirección perpendicular a la anterior. Combinando estos dos movimientos podremos colocar el ocular de la izquierda O_1 sobre la imagen del punto que deseemos de la vista.

Para hacer coincidir el índice del estereoscopio con el punto del espacio, cuya es esta proyección, será preciso mover la placa de la derecha, en la dirección de las paralajes, y esto se consigue por intermedio de la manivela Z , los tornillos sin fin S_p , S y S_p , y las tuercas UU , el puente ME (1), la conexión E (obligada a mantenerse en la intersección de las rectas dK_b , ME y E -III) y, finalmente, la palanca E -III que gira alrededor de este último punto y hace deslizar lateralmente al punto F_3 y, con él, a la placa de la derecha. En definitiva: moviendo convenientemente las tres manivelas se logra hacer coincidir el índice del estereoscopio con el punto que se desee de la imagen estereoscópica del terreno.

Veamos ahora los movimientos que, simultáneamente con los anteriores y como consecuencia de ellos, se han producido en los diversos órganos del Estereoautógrafo y cómo de ellos pueden deducirse las coordenadas del punto elegido.

El eje de giro III, se halla a una distancia $\frac{f}{m}$ de la recta descrita por F_3 , y a una distancia Bm de la recta principal $JK_B E$ de la placa de la derecha, en su posición normal. Los triángulos semejantes que en el aparato se forman permiten escribir la proporción

$$\frac{D}{bm} = \frac{f}{\pi},$$

en que π es la paralaje del punto y D la distancia normal. Vemos, pues, que el puente UU se halla a una distancia de la recta que contiene los tres ejes de giro, igual a la distancia normal D . Tenemos, pues, determinada esta distancia, gráfica y automáticamente.

(1) Por error de la figura, falta en ella la letra E en la intersección de las rectas PM y d .

La determinación de las magnitudes bm y $\frac{f}{m}$ puede hacerse mecánicamente con gran sencillez, siempre que se conozca la distancia a que, del extremo izquierdo (estación directora) de la base, se halle el plano de frente que contiene un punto M, cuya imagen se reconozca fácilmente en las fotografías. Basta, para ello, dibujar, a la escala a que con el estereoautógrafo ha de construirse el mapa, la traza de aquel plano de frente y la proyección de la estación directora. Situaremos esta proyección bajo el eje de giro I y esta traza paralela a la recta I-II-III y llevaremos el índice del microscopio a coincidencia con la imagen del punto M: aflojando la conexión III (con lo que la varilla E-III podrá girar alrededor de su extremo inferior), se accionará la manivela Z, haciendo avanzar o retroceder el puente hasta que su borde cubra la traza dibujada del plano de frente: la simple inspección de la figura hará ver que el factor m tiene el valor debido, y que, apretando de nuevo la conexión III, el aparato quedará en disposición de funcionar.

El eje de rotación designado con el número I se halla en la perpendicular a la base O_1O_2 , trazada por el ocular O_1 : y como la distancia de aquél a la trayectoria del punto F_1 es, en la escala adoptada, igual a la distancia focal f , el corrimiento x_1 del carrretón principal, partido por esa distancia, medirá la tangente del ángulo azimutal de la dirección del punto, y éste se hallará, por tanto, sobre la recta P-I. El punto P, en que esta recta encuentra al puente UU, será la proyección horizontal del punto del terreno, que podrá marcarse con el lápiz que con este objeto lleva el aparato.

Finalmente, el eje de giro II se ha fijado a una distancia de la trayectoria del punto F_2 (en el movimiento del microscopio) igual a la distancia focal f : luego el corrimiento y_1 de este microscopio, partido por f , nos dará la tangente del ángulo de altura del punto, y el triángulo IIMK_h, semejante al que forman las magnitudes anteriores, nos hace ver que la distancia MK_h es la altura de este punto sobre la estación de la izquierda. Es decir, que tenemos determinada, gráficamente también, la coordenada Y del punto.

De lo expuesto en los anteriores párrafos se deduce la posibilidad de obtener, automáticamente, las tres coordenadas de cada punto. Los ángulos azimutal α y de altura β pueden medirse directamente en los círculos graduados cuyos centros son, respectivamente, los puntos I y II. Para leer en K_h la altura absoluta del punto, en lugar del desnivel h sobre la estación de la izquierda, basta colocar la escala M de tal modo que, para $h=0$, se lea en ella la altura absoluta de esta estación.

Con este modelo de Estereoautógrafo se puede, como hemos visto, construir gráficamente un plano topográfico sin necesidad de cálculo ni operación auxiliar de ningún género. La rapidez, la exactitud y la comodidad en el trabajo, han logrado, con

el aparato que acabamos de describir, aventajar en mucho a todos los métodos anteriores.

Pero aun hay más.

Los movimientos de las tres palancas, que se producen con las tres manivelas, corresponden a las tres direcciones del espacio, a las tres coordenadas, abscisas, ordenadas y alturas. La Geometría nos enseña que en la ecuación de una superficie en coordenadas rectangulares, dando a una de las tres variables un valor constante, se obtiene la ecuación de la sección que en ella produce un plano perpendicular a la dirección en que aquélla se mide. Esto mismo puede decirse del Estereoautógrafo, que no es sino la materialización de la ecuación de tres variables.

Si obligamos al punto que, sobre el tablero, marca el extremo de una de las coordenadas X , Y , $Z=D$, a no salir de una perpendicular a la recta en que ésta se mide, y accionamos las manivelas correspondientes a las otras dos, de modo que el estilete se conserve en contacto con el terreno, los puntos de éste que aquél recorre se hallarán en un plano paralelo a las direcciones de estas coordenadas en el espacio: es decir, serán los puntos de una sección plana del terreno, que podrá ser la producida por un plano horizontal, de frente, o de perfil.

He aquí resuelto el problema del trazado gráfico y automático de las curvas de nivel.

Bastará obligar a la conexión K_n a moverse sobre una perpendicular a la recta I-II-III, que corte a la escala de alturas en la lectura que se desee, para que el movimiento simultáneo de las manivelas H y Z , combinado de modo que el estilete del microscopio se mueva sobre la imagen estereoscópica que en éste aparece, haga que el lápiz colocado en P trace sobre el tablero la proyección horizontal de la curva de nivel correspondiente a la lectura citada.

Terminada esta curva, y haciendo avanzar el punto K_n sobre la regla M en la cantidad que se desee, podremos obtener otra nueva y, sucesivamente, todas las que juzguemos precisas para la completa terminación del plano. El intervalo entre cada par de curvas consecutivas puede ser el que convenga, según la escala y exactitud que en el plano se deseen.

Fácilmente se comprende que podremos, en lugar de la manivela V , dejar fijas la H o la Z , y obtener así las curvas de igual abscisa o situadas sobre planos de frente: pero estas curvas no tienen gran interés para la práctica usual de la Fotogrametría.

Para el caso en que conviniera fijar en el plano topográfico la proyección horizontal de una línea del terreno (camino, fondo de un valle, límite de cultivo, etc.), que no pertenezca a ninguno de los grupos antes estudiados, es preciso poder dar movimiento, simultáneamente, a las tres manivelas, y para ello, en el último modelo del

estereoautógrafo se puede mover la manivela V con el pie, mientras la mano derecha actúa en el Z y la izquierda en el H.

Colocando un lápiz en K_* obtenemos, también automáticamente, y al mismo tiempo que la proyección horizontal de la línea continua del terreno, su perfil longitudinal, proyectado sobre un plano vertical perpendicular a la base O_1O_2 .

También puede obtenerse automáticamente el dibujo, en perspectiva, de cada curva de nivel sobre una positiva de la fotografía obtenida desde la estación de la izquierda. Basta, para ello, colocar esta prueba en un tablero sólidamente unido al carretón principal (1) y añadir al microscopio un brazo provisto en su extremo de un lápiz P_1 : del movimiento relativo del lápiz y la positiva resultarán las líneas deseadas. Una disposición especial permite levantar este lápiz y el del trazador del plano durante el movimiento de retroceso necesario para pasar de una a otra de las curvas de nivel (2).

La práctica necesaria para el manejo del estereoautógrafo se obtiene rápidamente: la condición esencial para éste es la aptitud para la percepción del relieve estereoscópico, que puede examinarse con una lámina especial preparada por el Dr. Pulfrich, ya citado (3).

Consiste esta lámina en un doble dibujo, construído por los procedimientos de la perspectiva para que produzca efecto de relieve estereoscópico, de varios elementos geométricos, puntos y rectas aisladas, polígonos, circunferencias, siluetas y una vista de Saturno con sus satélites y anillos y las estrellas fijas que en sus proximidades se hallaban al fotografiarlo.

Por el modo de estar dibujados todos estos elementos, con simples trazos, sin sombras propias ni arrojadas, ni detalle alguno que pueda indicar en una sola de las placas el relieve de cada uno ni las distancias relativas a que se hallan colocados, sirven perfectamente para experimentar la aptitud fisiológica de la vista de cada individuo para las aplicaciones métricas del estereoscopio.

La lámina original fué construída con mucha precisión, a grande escala, y reproducida después fotográficamente para reducir la base estereoscópica a la separación normal de los ojos ($0^m,065$). La precisión de las distancias en esta fotografía es de $\pm 0^{mm},015$, que corresponde a una paralaje de $\pm 20''$, inferior al límite de percepción para los mejores observadores.

(1) En las figuras 17 y 18 aparece a la izquierda de las placas P_1 y P_2 .

(2) Además de las proyecciones horizontal, de frente y de costado, que con el Estereoautógrafo hemos visto pueden obtenerse, logra von Orel construir modelos en relieve del objeto representado en las fotografías, por medio de una herramienta que toma de aquél su movimiento: el conjunto así constituído recibe el nombre de «estereoautoplástico».

(3) «Ueber eine Pruefungstafel fuer stereoskopisches Sehen, von Dr. C. Pulfrich. in Jena» (En el Zeitschrift fuer Instrumentenkunde. Berlín, cuaderno IX, Septiembre de 1901).

Las positivas se han hecho en vidrio para poder ser observadas por transparencia, pues la visión estereoscópica es, como ya hicimos notar al describir el estereocomparador, mucho más perfecta de este modo que usando positivas en papel, iluminadas por reflexión.

Al poco tiempo de trabajar con el constructor del capitán von Orel se adquiere tal destreza, que el operador combina los movimientos de los dos manubrios, de modo que la señal óptica se apoye siempre sobre el relieve del terreno, al modo de un autómatas que, sin darse de ello cuenta, conserva el equilibrio al andar.

La experiencia demuestra que los órganos del Estereoautógrafo y su enlace son tan perfectos, que un regular operador obtiene las curvas de nivel con error menor de 0,2^{mm}.

El conjunto de este aparato (modelo 1909) puede verse en la figura 18, en la que aparece con él su ilustre inventor.

V. — TRABAJOS REALIZADOS CON EL MODELO 1909 DEL ESTEREOAUTÓGRAFO

En Hagmáskér (Hungría) fué realizado un primer ensayo del método y de los aparatos estereoscópicos en condiciones excepcionalmente difíciles. Como se ve en la figura 19, que reproduce el panorama dominado desde la estación 4, el terreno era ligeramente ondulado, con formas poco acusadas, condiciones las menos propicias para la aplicación del método fotogramétrico: el tiempo fué, además, frío y brumoso, lo que limitaba notablemente el horizonte visible. A pesar de estas dificultades, las curvas de nivel obtenidas por uno y otro método resultaron perfectamente concordantes. Tiene este resultado especial importancia por la exactitud con que se obtuvo el plano taquimétrico, con unos 800 a 1,000 puntos por kilómetro cuadrado, lo cual permitió detallar mucho las curvas de nivel.

En las figuras 20 y 21 pueden verse dos vistas, de las que sirvieron para el levantamiento topográfico de la montuosa región de Pfelder, en los Alpes de Oetz (Tirol). Son las obtenidas desde las estaciones 73 y 76, y en ellas aparecen los macizos de Zwickauer y Stettinerhuetten. El plano que se dedujo de estas vistas, y de las obtenidas desde las estaciones 71 y 79, se ha representado en la figura 22. Salvo las pequeñas partes que se ocultaban a la vista de las estaciones, por formar barrancadas profundas y sinuosas, o por estar completamente cubiertas de bosques espesos, y que en el dibujo corresponden a los trozos de curvas de nivel dibujados de puntos, el plano resultó perfecto.

Los trabajos de campo exigieron dos días, por lo penoso de las ascensiones a los

cuatro puntos de estación, y el manejo de las placas en el estereoautógrafo llevó diez y seis horas. Junto con otras pequeñas operaciones auxiliares, el trabajo quedó enteramente listo en 5 días, abarcando una extensión de 20 kilómetros cuadrados, y empleando la escala de $1/25000$ para el dibujo del plano. Téngase en cuenta que, además de las curvas de nivel cada veinte metros, se determinaron las alturas de las cumbres y puntos notables, se marcaron y rotularon los caminos, fondos de barrancos, límites de masas rocosas y de arbolado, y demás elementos convenientes para el perfecto conocimiento de la región representada.

En las campañas de verano de 1909 y 1910 se obtuvieron, en las regiones de Meran-Sterzing-Sand, los datos de 2000 kilómetros cuadrados de terreno, con 204 estaciones, y sólo para una cuarta parte de este área, cubierta de bosque espeso, hubo que acudir a los métodos ordinarios, por no ser aplicable el fotográfico.

VI. — MODELOS 1911 Y 1913 DEL ESTEREOAUTÓGRAFO

El modelo 1909 del estereoautógrafo resuelve por completo, como hemos visto, el trazado automático de líneas del terreno y curvas de nivel, sirviéndose de dos fotografías obtenidas en un mismo plano (que será, naturalmente, paralelo a la base).

Pero no es raro el caso en que una extensión de terreno tiene su mejor o quizá único punto de vista en una ladera que no presenta espacio apropiado para colocar una base perpendicularmente a la dirección general de las visuales que a aquel terreno se dirigen.

Sería entonces muy conveniente poder obtener las vistas en placas oblicuas a la base, y en más de un caso pudiera ofrecer ventaja el que estas placas no fueran tampoco paralelas entre sí.

También es frecuente que los extremos de una base dominen el terreno en una amplitud horizontal superior a la de la cámara fotográfica, y entonces representa gran economía de tiempo y de dinero, el poder aprovechar, además de las placas normales (paralelas a la base) otras que se inclinen respecto a ésta a uno y otro lado.

En resumen, que además del caso *a*) de los estudiados anteriormente (pág. 56) y que resuelve el modelo 1909, es muy conveniente que el Estereoautógrafo resuelva los *b*) y *c*) y, por consiguiente el *d*). Esto es lo que el modelo 1911 logra ya realizar: el trabajo con placas verticales que ocupen una posición cualquiera una respecto a la otra y las dos con relación a la base (1).

(1) El empleo de placas inclinadas para alcanzar zonas muy elevadas o deprimidas respecto a la base, conduce a construcciones muy complicadas y no presenta ventajas en la práctica, desde que se cuenta con objetivos de 60 y más grados útiles de abertura.

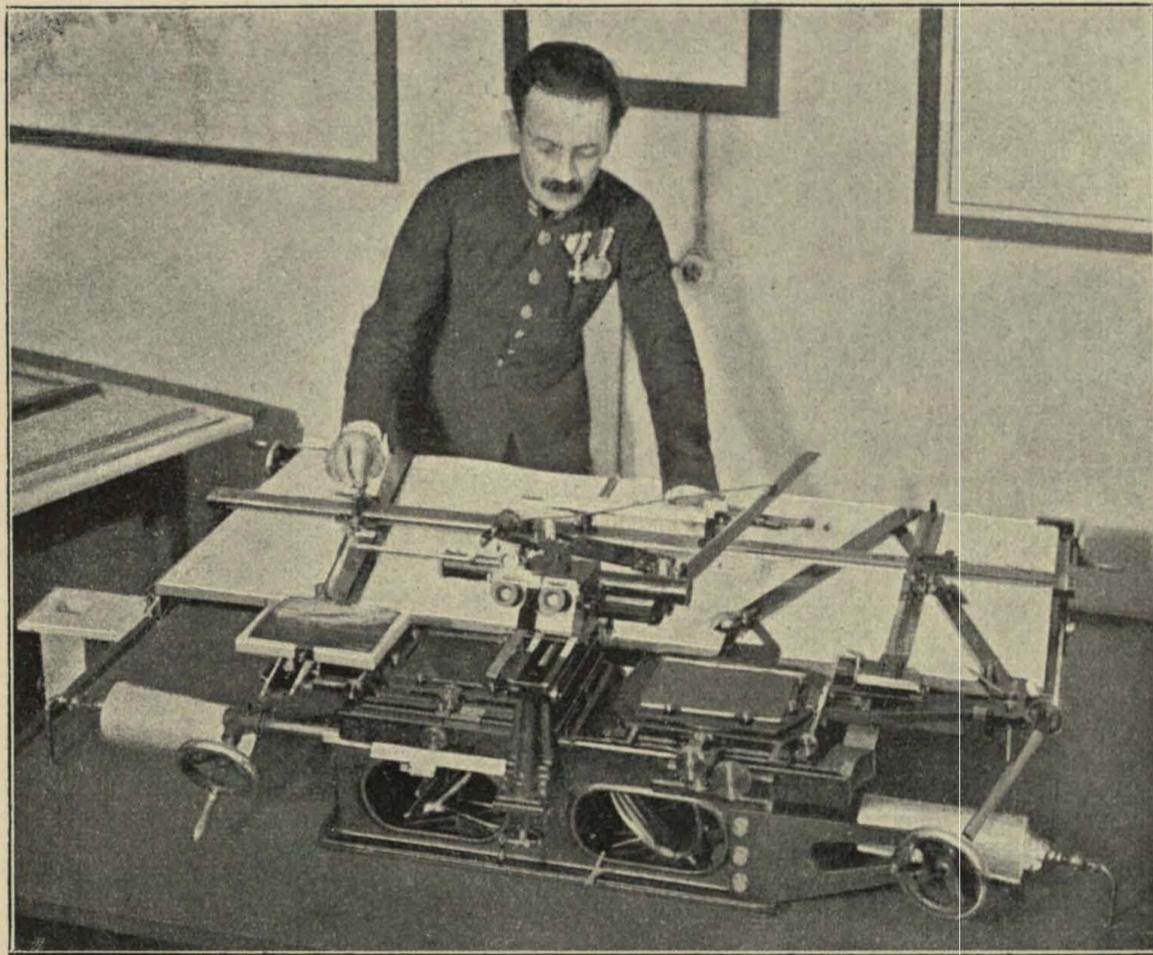


Fig. 18



Fig. 19

J. M. Torroja

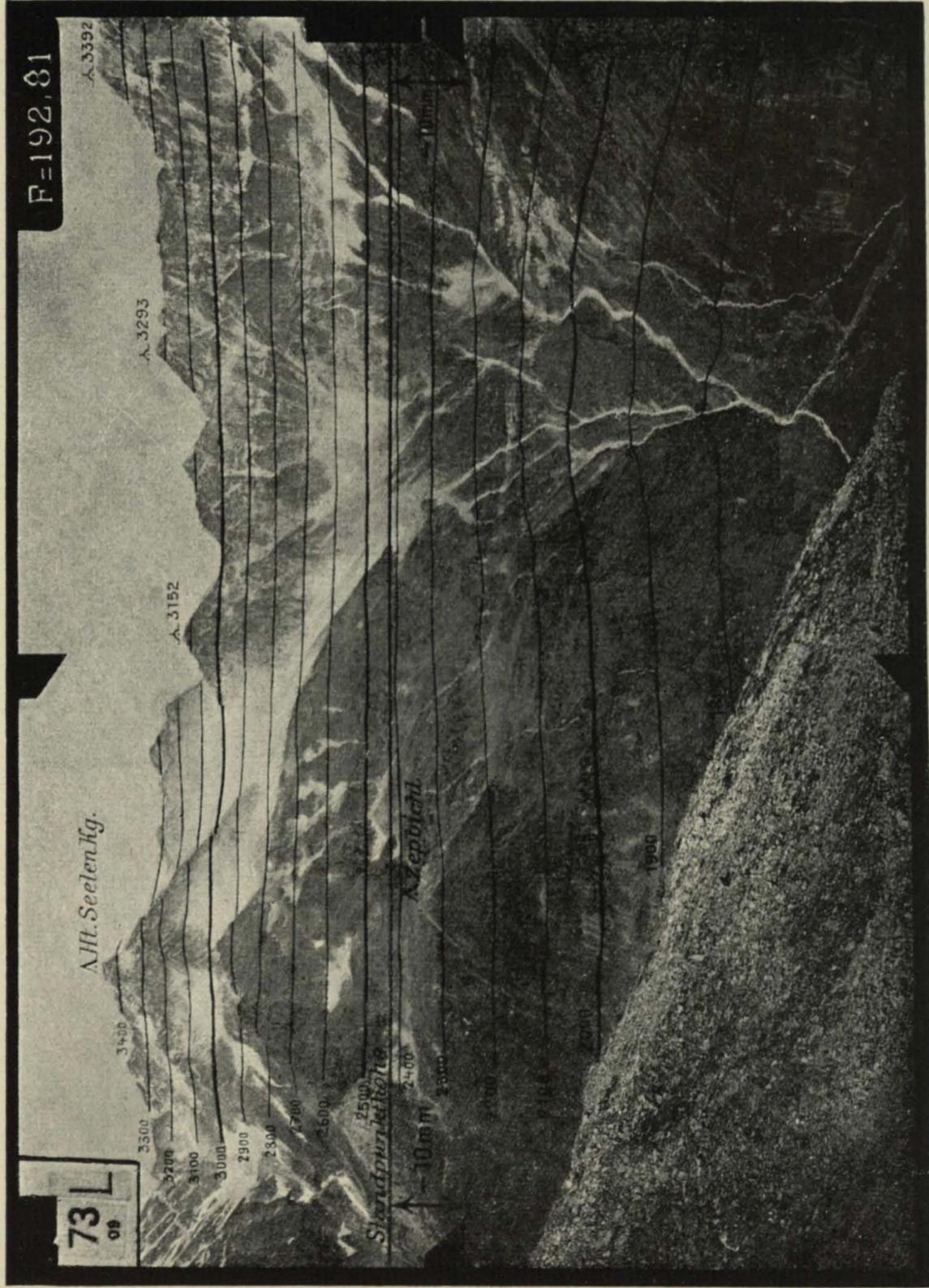
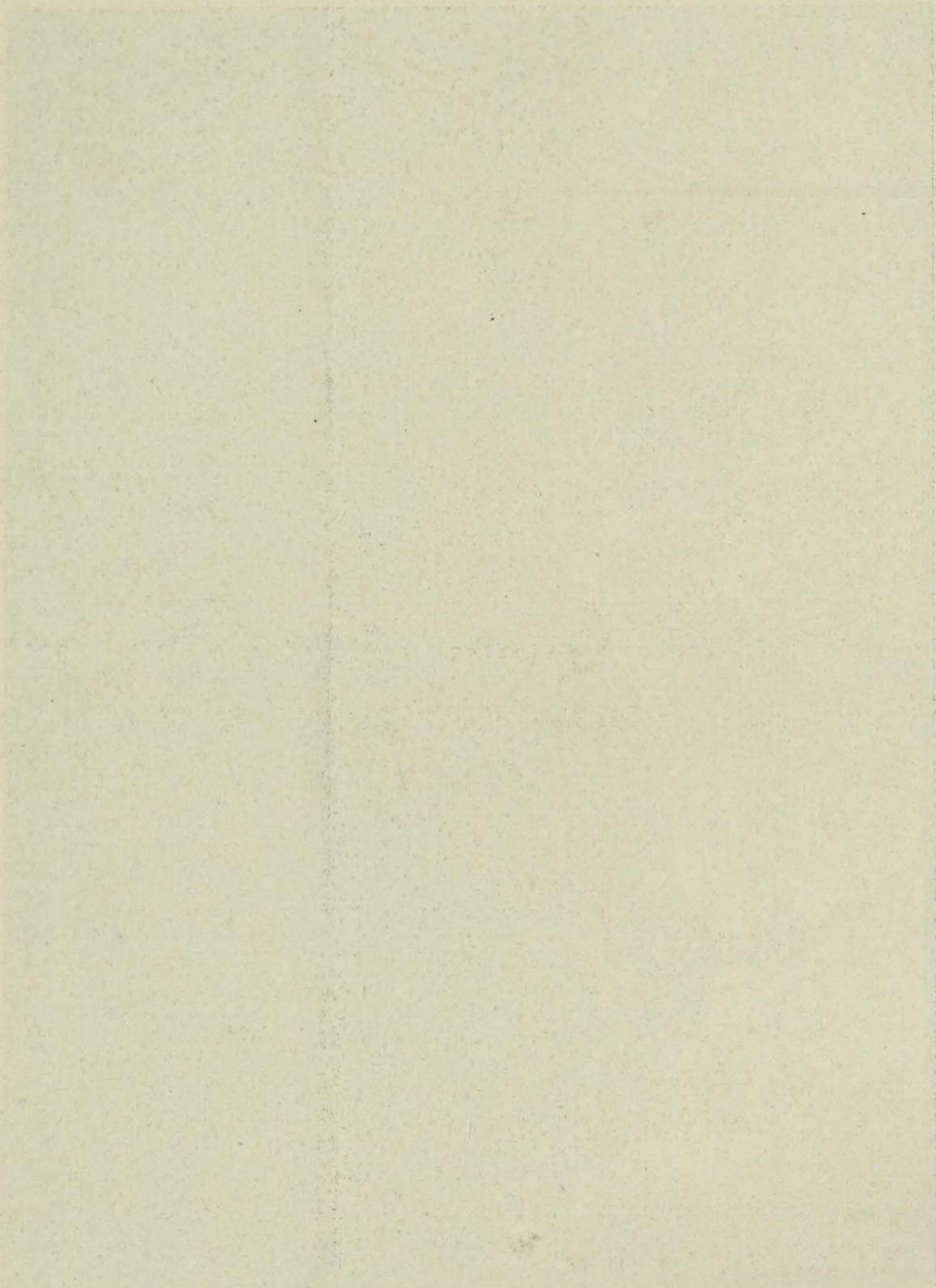


Fig. 20

Arxius de l'Institut de Ciències



J. M. Torroja



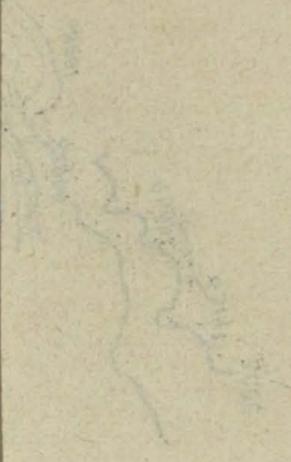
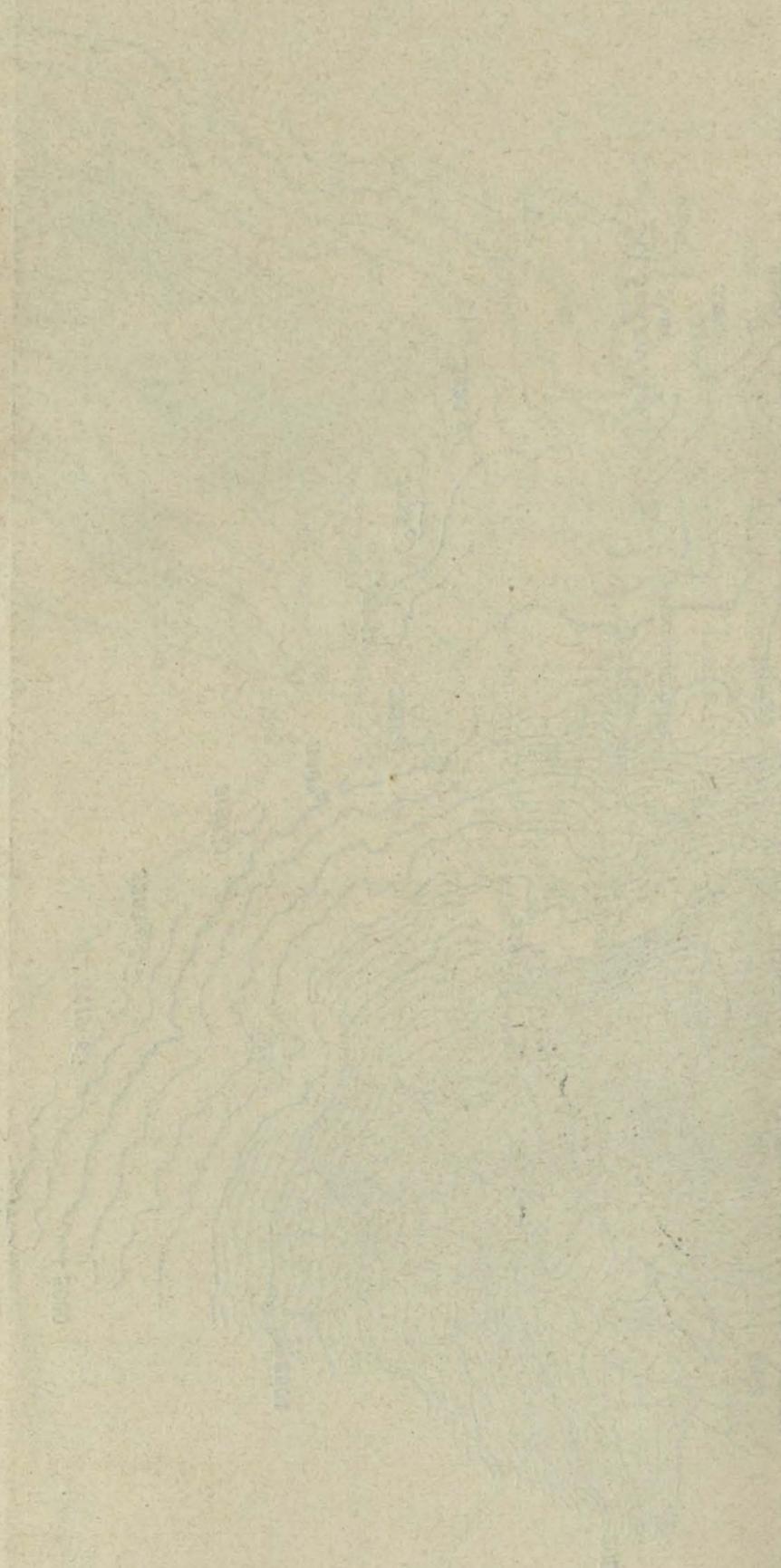
Fig. 21

Arxius de l'Institut de Ciències



Fig. 22

University of California
Library



University of California
Library

100

El fundamento de este modelo, cuyo croquis puede verse en la figura 23, es análogo al del anterior. Tiene aquél, como éste, un carretón principal que mueve el conjunto de las dos placas en la dirección de las abscisas, otro que desplaza la derecha respecto de

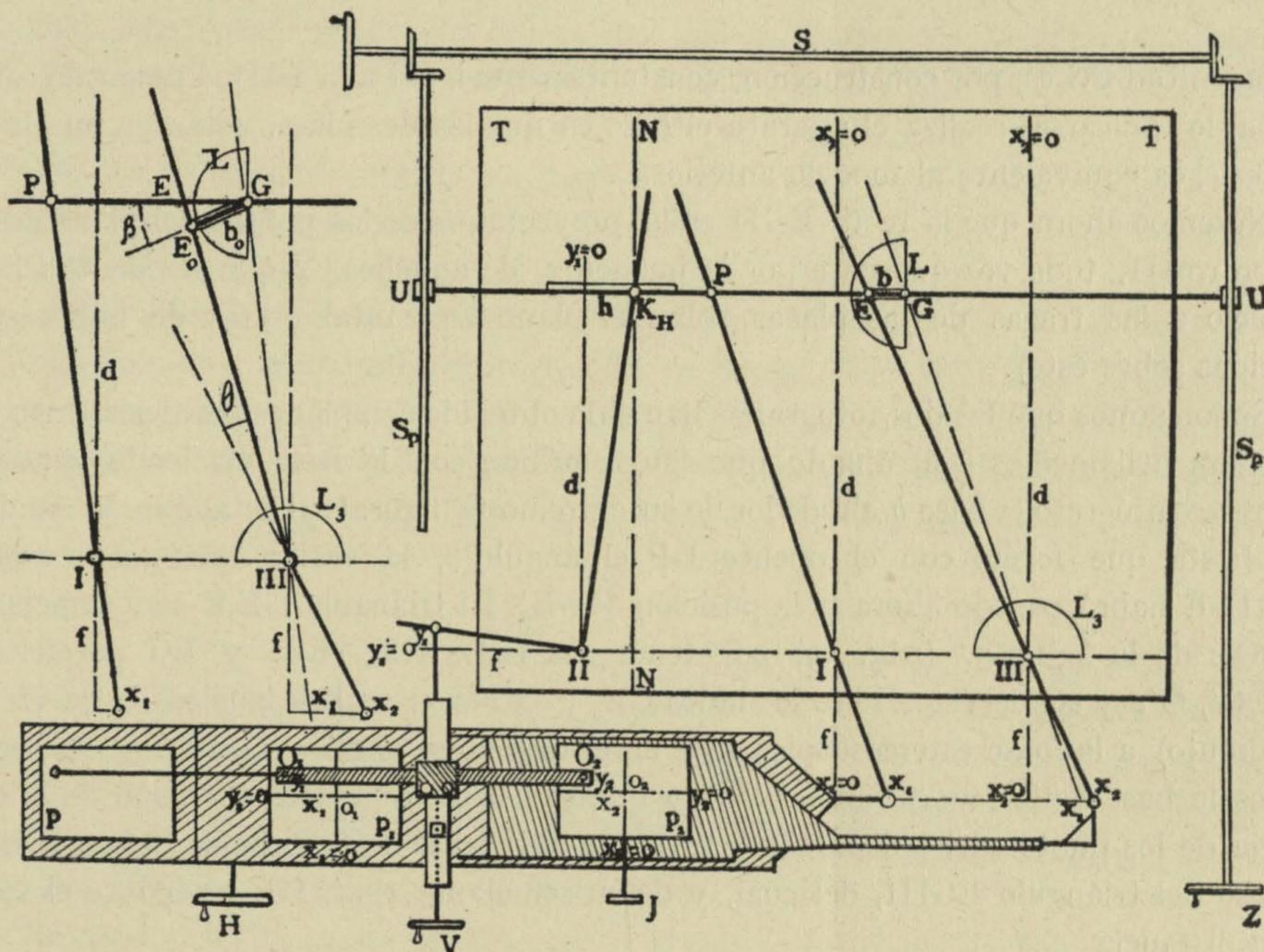


Fig. 23

la izquierda en la misma dirección, y un estereomicroscopio que corre paralelamente a las ordenadas y rectas principales de las placas.

Idénticos se conservan, asimismo, salvo su colocación, los órganos que dan la dirección real del punto y su altura, ya que estos elementos dependen sólo, como anteriormente hicimos notar, de una de las placas y no de su posición respecto a la otra.

Veamos las diferencias que, en la palanca que arrastra el puente y determina la distancia del plano de frente que contiene el punto, presenta el nuevo modelo del Estereoautógrafo, comparado con el antiguo.

La distancia focal se toma ahora en verdadera magnitud, y la base a la escala del dibujo, sin factor de amplificación, pero no ya a partir del eje de giro de la palanca III-E, sino sobre el puente, y en la disposición que en la posición inicial b_0 , in-

dica la figura. Los triángulos semejantes que en ésta se ven, permiten escribir directamente

$$D = b \frac{f}{\pi}.$$

La magnitud PG es, por construcción, constantemente igual a la I-III. Preparado como acaba de indicarse, realiza el aparato el caso en que las dos placas están en un plano; es decir, es equivalente al modelo anterior.

Notemos ahora que la recta E-III es la proyectante de los puntos del plano desde el centro III, toda vez que pasa por la imagen x_2 de aquéllos. Y que el puente PE es paralelo a las trazas de las placas sobre el plano horizontal (antes de haber sido abatidas sobre éste).

Supongamos que las dos fotografías han sido obtenidas en planos paralelos (caso *b*), pág. 59), y llamemos β al ángulo que éstos forman con la base: haciendo girar en el estereoautógrafo la base *b* alrededor de su extremo G (figura 23, detalle de la izquierda) hasta que forme con el puente GP el ángulo β , la varilla que antes estaba en III-E habrá pasado ahora a la posición III-E₀. El triángulo GE₀E será semejante al OO'e de la figura 3.^a (pág. 59) por tener sus lados GE₀, E₀E y EG paralelos a los OO', O'e y eO de éste. Pero los lados GE₀ y OO' son ambos iguales (en la escala del dibujo) a la base estereoscópica, que en el terreno se eligió: y Oe (fig. 3), es según vimos la base ficticia y variable que hay que tomar para la determinación de la distancia de los puntos del terreno; luego GE (fig. 23) igual a Oe será, en cada posición, la base del triángulo EGIII, del cual, y de su semejante x_2 x'_1 III, se deduce el valor de la distancia

$$D = GE \frac{f}{\pi} = b_0 \frac{f}{\pi}.$$

Dispuesto así el aparato y haciendo por medio de una mordaza que el ángulo de la base con el puente se conserve constante, pueden ya emplearse placas obtenidas en planos paralelos.

Sea ahora el caso *c*) (pág 60) en que una de las placas es oblicua respecto a la base. Vimos al estudiarle que bastaba, para su resolución, quebrar los rayos proyectantes desde la estación O' en este mismo punto y en el ángulo θ , de las dos placas. La materialización de este quiebro se efectúa en la varilla E-III que, con tal fin, se compone de dos partes cuyo ángulo, medido en el limbo L₃, puede conservarse constante mediante una mordaza convenientemente dispuesta. Tenemos, pues, resuelto el caso *c*) con el Estereoautógrafo.

Si las placas son ambas oblicuas a la base y lo son igualmente entre sí, deben combinarse los dos giros anteriores, y el aparato realizará la construcción del plano con placas verticales obtenidas en cualquier posición.

Actualmente (Agosto de 1913) está terminando la casa Zeiss un nuevo modelo (1913) del Estereoautógrafo, que sólo difiere del que acabamos de estudiar en pequeños detalles constructivos, por lo que no damos de él una descripción detallada. Diremos sólo que, por efecto de un estudio más detenido de la parte mecánica su peso es, próximamente, de una tonelada, en lugar de una y media que pesaba el modelo 1911; que en lugar de tener, como éste, una disposición que permite variar en las tres varillas la distancia focal, para hacerla igual a la de la cámara empleada, aquella distancia es fija, y se amplían o reducen, en la escala conveniente, las fotografías, cuando se han obtenido con aparatos distintos del corriente (Zeiss-Orel, 1911) para el que el Estereoautógrafo 1913 se ha construído; y, finalmente, que en éste, una sencilla disposición permite leer junto al ocular del Estereocomparador las alturas YY, en vez de ir a buscarlas a la escala que, lejos de aquél, en K_n, llevaba el modelo 1911 y conserva el nuevo.

VII. — TRABAJOS REALIZADOS CON EL MODELO 1911 DEL ESTEREOAUTÓGRAFO

En el verano de 1911 se realizó, por el método estereofotográfico automático, un importante trabajo, que se incorporó al Mapa general de Austria-Hungría que, a escala de 1/25.000 se construye al presente.

En menos de dos meses se tomaron en el campo los datos de 800 kilómetros cuadrados de terreno, con 70 estaciones estereoscópicas, cada una de las cuales vino, por tanto, a comprender una extensión de unos 11 km.²

Con el fin de aprovechar toda la zona que desde cada estación podía descubrirse, se utilizaron vistas normales (perpendiculares a la base) y oblicuas (desviadas 30° a uno y otro lado). Con esta modificación se ampliaba la abertura horizontal de la cámara desde 45 a 100 grados útiles.

Como muestra de una pequeña parte del trabajo representamos en la figura 24 el conjunto de una vista normal y las oblicuas adyacentes obtenidas desde la estación I, 24 en el pico Steinerholm que era, a la vez, vértice trigonométrico. En la parte central se ven, en perspectiva, las curvas de nivel. En el plano que acabamos de citar se midieron las áreas dominadas por la fotografía normal y por las dos oblicuas, resultando que el empleo de las últimas aumentó notablemente el área aprovechable desde la estación desde la cual se obtuvieron: este aumento se limitó en el caso actual

a triplicar el área primitiva porque gran parte de la zona correspondiente a la placa desviada hacia la derecha no pudo ser aprovechada por estar ya a distancia excesivamente grande de la estación, en relación con la magnitud de la base estereoscópica elegida (ésta era de 276^m y no se utilizaron puntos que distaran más de 35 veces esta magnitud, es decir, unos 9 1/2 kilómetros).

Con la restricción, la zona útil dominada por la estación I, 24 fué de unos 25 kilómetros cuadrados, que pueden verse en la figura 25. El trabajo de campo se hizo en una hora, y en el gabinete se emplearon 8 para el esqueleto de líneas notables (arroyos, caminos, particiones de cultivos, etc.) y 9 1/2 para trazar las curvas de nivel.

No podemos dar cuenta de trabajo alguno realizado con el modelo 1913 del Estereoautógrafo, por no haber salido aún de los talleres de Zeiss al entrar en prensa este artículo.

VIII. — CÁMARAS EMPLEADAS PARA OBTENER LAS VISTAS SOBRE LAS QUE TRABAJA EL ESTEREOAUTÓGRAFO

Las cámaras fotográficas con que se obtienen las vistas estereoscópicas que en el estereoautógrafo han de emplearse, han de reunir condiciones especiales, y no pueden servir para este objeto las que usa la fotogrametría ordinaria.

Para obtener pares de placas nórmales, es preciso que éstas sean perfectamente paralelas a la base, y el cumplimiento de esta condición exige la existencia de un anteojo alidada de eje horizontal perpendicular a aquéllas, que acompañe invariablemente a la cámara situada en uno de los extremos de la base, y se dirija exactamente a un estilete colocado en el otro.

La fijación de la posición de la base referida a tres o más puntos trigonométricamente determinados (cuando esta fijación se efectúa en el campo) exige, además, un teodolito ordinario, que puede ser solidario con la cámara, haciendo de ésta un fototeodolito, o independiente, completando así lo que se llama entonces un fotogrametro.

Describiremos en estas páginas tres modelos de tipos enteramente diferentes, que en los trabajos estereofotogramétricos han prestado excelentes servicios, y con los cuales se han obtenido los datos de campo de los anteriormente citados.

El modelo más antiguo, es el representado en la figura 26. A a un trípode resistente, cuya estabilidad se aumenta cargando de piedras un saco de cuero que de sus tres brazos pende, va unido invariablemente un triángulo metálico provisto de cuatro cilindros fileteados, uno en el centro y otro próximo a cada uno de sus vértices.

A los últimos se unen los tornillos nivelantes del aparato, fijándose éste sólida-

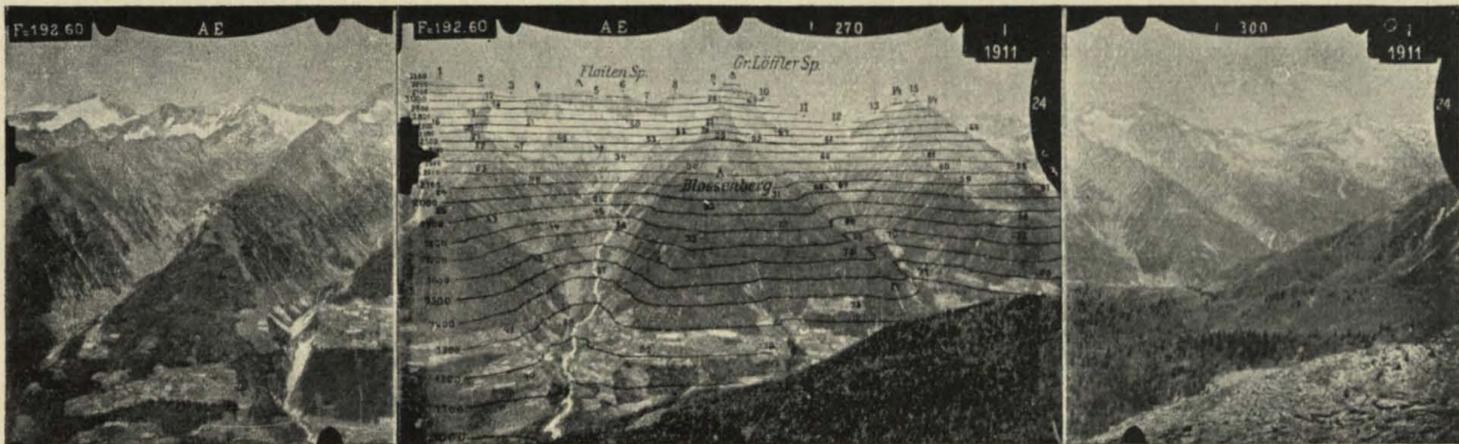


Fig. 24

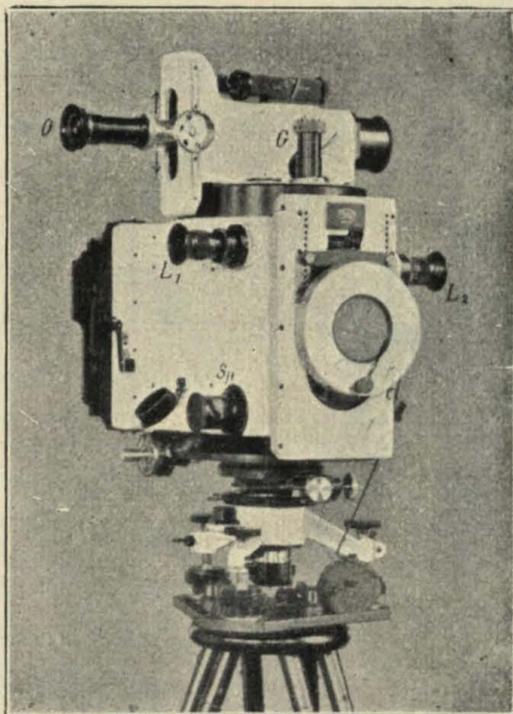


Fig. 27

mente por medio de un tornillo central y una tuerca R. Alrededor del eje vertical gira el círculo horizontal graduado H, que puede moverse libremente a mano o con el tornillo m_1 y fijarse con el k_1 . La cámara fotográfica r , con el contrapeso G y los nonius, va invariablemente unida al mismo eje vertical, recibiendo movimiento por el tornillo micrométrico M. Frente al objetivo Ob de la cámara hay un pequeño espejo S, y encima de éste un nivel L, una aguja imantada N y el anteojo Ok, que es acodado y va provisto de un círculo graduado vertical V, recibiendo ambos movimiento por medio del tornillo T.

La cámara, de una sola pieza, es de aluminio. Su objetivo es Tessar y comprende un ángulo horizontal de 45° . La recta principal de la placa viene determinada por dos orificios cónicos, practicados en el marco en que se apoya la parte anterior de la placa: al impresionarse ésta, el orificio situado en la parte inferior dejará pasar los rayos procedentes del cielo del paisaje, y el orificio superior los que parten de la misma región y se reflejan en el espejo S. El punto central de la placa se encuentra sobre la recta principal y a la distancia del punto inferior de referencia (superior en la fotografía), marcada en el mismo aparato.

El anteojo es doblemente acodado y tiene un aumento de 10 a 15 diámetros. El eje óptico de la parte central del anteojo es exactamente paralelo al de la cámara fotográfica, y los dos extremos son perpendiculares a ésta, gracias a otros tantos prismas pentagonales de reflexión total, de modo que al girar describen planos paralelos al de la placa. La parte central contiene el objetivo y el retículo, la acodada anterior, el ocular: la posterior es sólo virtual. Como el plano descrito por los rayos que salen del anteojo pasa por el eje del giro del fototeodolito, el anteojo sirve al mismo tiempo para el teodolito y para la orientación de la cámara.

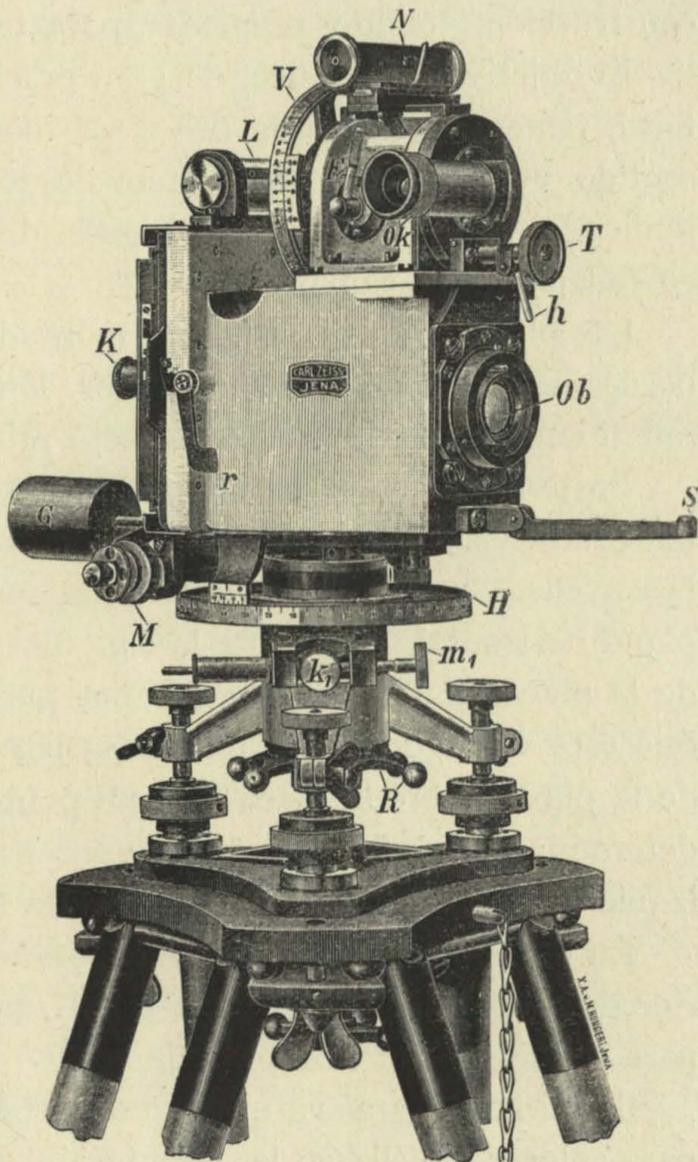


Fig. 26

Los círculos horizontal y vertical están divididos en medios grados, y los nonius permiten leer el minuto y apreciar medios minutos: el horizontal es completo; el vertical alcanza sólo 30° a cada lado de la horizontal.

El segundo modelo de fototeodolito fabricado como el anterior por la casa Carlos Zeiss, de Jena, presenta diferencias notables si con el anterior se compara.

En la figura 27 se ve este aparato, montado sobre su trípode, que es de especial construcción, sólido y resistente, para trabajos en terreno quebrado.

El objetivo fotográfico, de gran precisión, es orto-protar, de $192,60^{\text{mm}}$ de distancia focal, tiene un campo de 60° y va montado en una deslizadera v que se mueve en sentido vertical, con una carrera de 30^{mm} a uno y otro lado de su posición normal, pudiendo fijarse en varias posiciones, de 5 en 5^{mm} por medio de salientes que encajan en rebajos de la cámara.

Las placas, de 13×18 , van montadas en un marco que lleva tres señales en su borde inferior y una en el superior. Estas señales aparecen en las fotografías y permiten conocer con precisión la recta principal de éstas, 1-4, perpendicular a la 2-3.

Posteriormente se ha introducido una modificación muy práctica, que permite la inmediata visibilidad de la recta de horizonte sobre la placa: unido invariablemente a la corredera v del portaobjetivo, hay un vástago que, conservándose siempre en un plano horizontal, contornea la superficie interior de la cámara, hasta llegar al plano de la placa, donde termina en una punta m . Claro es que, si el plano horizontal en que este vástago se desarrolla pasa por el centro óptico del objetivo, la proyección de la punta sobre la placa será un punto de la recta de horizonte, y ésta se podrá determinar inmediatamente por ser paralela a la 2-3: esta punta aparece a la izquierda de la fotografía representada en la figura 19.

En esta misma vista puede observarse la forma del saliente que en la parte inferior del chasis (superior en la placa), permite la inscripción de los datos necesarios para el registro de la fotografía.

Sobre la cámara va montada una estadia, giratoria alrededor de un eje vertical, para colocar aquélla en la orientación que se desee. El anteojo no tiene movimiento en sentido vertical, y para poder dirigirlo a puntos situados por encima o por debajo de su plano de nivel, puede su ocular O subirse o bajarse, con una carrera máxima correspondiente, en su plano, a $\text{tg } 10^{\circ}$. Este anteojo alidada es una verdadera cámara fotográfica, con un objetivo Tessar, de $0^{\text{m}},15$ de distancia focal, y en cuyo cristal deslustrado hay grabada una escala vertical dividida en milímetros, que sirve para medir distancias y también el tamaño de las imágenes que en él se forman, y que se observan con un microscopio, móvil en sentido vertical. Para poder situar el eje óptico de la cámara formando con el del anteojo ángulos de 30° , lleva el platillo en

que éste descansa un cono de acero, colocado lateralmente, que entra en rebajos adecuados, practicados en el cuerpo de la cámara.

La nivelación del aparato se consigue merced a un nivel esférico colocado en el fondo de la cámara, por su parte interior, para resguardarlo de las influencias atmosféricas. Este nivel no tiene escala ni graduación alguna, y se observa por dos oculares L_1 y L_2 , situados en ángulo recto uno respecto del otro, y en cuyos campos ópticos aparece una serie de círculos concéntricos, que permiten centrar la burbuja con gran precisión. El nivel se ilumina con la luz solar, convenientemente reflejada en el sistema óptico S_p . El error que en la nivelación de la cámara por este procedimiento puede obtenerse no excede de 5 ó 6''.

Un tornillo micrométrico M , con su correspondiente tambor, mide la longitud de la base estereoscópica en una mira horizontal. El empleo de este aparato es idéntico al del modelo que acabamos de estudiar.

El modelo de fototeodolito que acabamos de describir fué entregado al Instituto Geográfico Militar en Octubre de 1909, y se estrenó en el trabajo de comprobación ya citado de Hajmáskér (Hungría) en Noviembre del mismo año.

El mes siguiente se recibió el modelo 1909 del estereoautógrafo, y se aplicó al mismo trabajo citado, comparando los resultados así obtenidos con los de otro plano taquimétrico de la misma comarca. La identidad entre ambos fué perfecta, revelando la perfección de los aparatos que en él se emplearon.

Los dos fototeodolitos descritos llevan, como hemos dicho, un tornillo micrométrico que mueve el limbo horizontal y sirve, además, para efectuar la medida directa de la base estereoscópica en los casos en que esto sea necesario.

Para esta operación es preciso situar, en el extremo de la base opuesto a aquel en que hemos colocado el fototeodolito, otro trípode, igual al de éste, en el cual se sitúa una estadia horizontal perpendicularmente a la base citada. Con objeto de afinar esta posición lleva la estadia (fig. 28) un pequeño anteojito, normal a su dirección.

Existen varios modelos de estadia, tubulares unos y en forma de telescopio, otros triangulares rígidos mucho más ligeros, y en uno y otro caso, de longitudes diversas, según las distancias que han de medir. Si éstas fueran excesivamente grandes para aplicarles el método que a continuación exponemos, se efectuaría la medida de la base en dos partes, que se sumarían si la estadia se hallare en la alineación de ésta, o considerándola como el tercer lado de un triángulo, en el que se miden los otros dos.

La relación entre el paso del tornillo micrométrico M y la distancia de su eje al vertical de rotación del aparato es exactamente de $\frac{1}{100}$: de modo que un intervalo del tambor vale $\frac{1}{10\ 000}$ de ésta.

La estadia de un metro se halla dividida en centímetros numerados de 10 en 10. Si llevamos el hilo central del retículo del anteojo a coincidir con el trazo central de la estadia, y se sigue girando el tambor hasta que, a partir de esta posición, haya descrito una revolución completa, el número de centímetros recorridos por el hilo sobre la estadia da la proyección horizontal de la base en metros, independientemente del valor y signo de la inclinación de éste.

Otro método, análogo al anterior, consiste en apuntar con el anteojo a un extremo de la mira, hacer la lectura correspondiente, dirigirlo al otro extremo y hallar la dife-

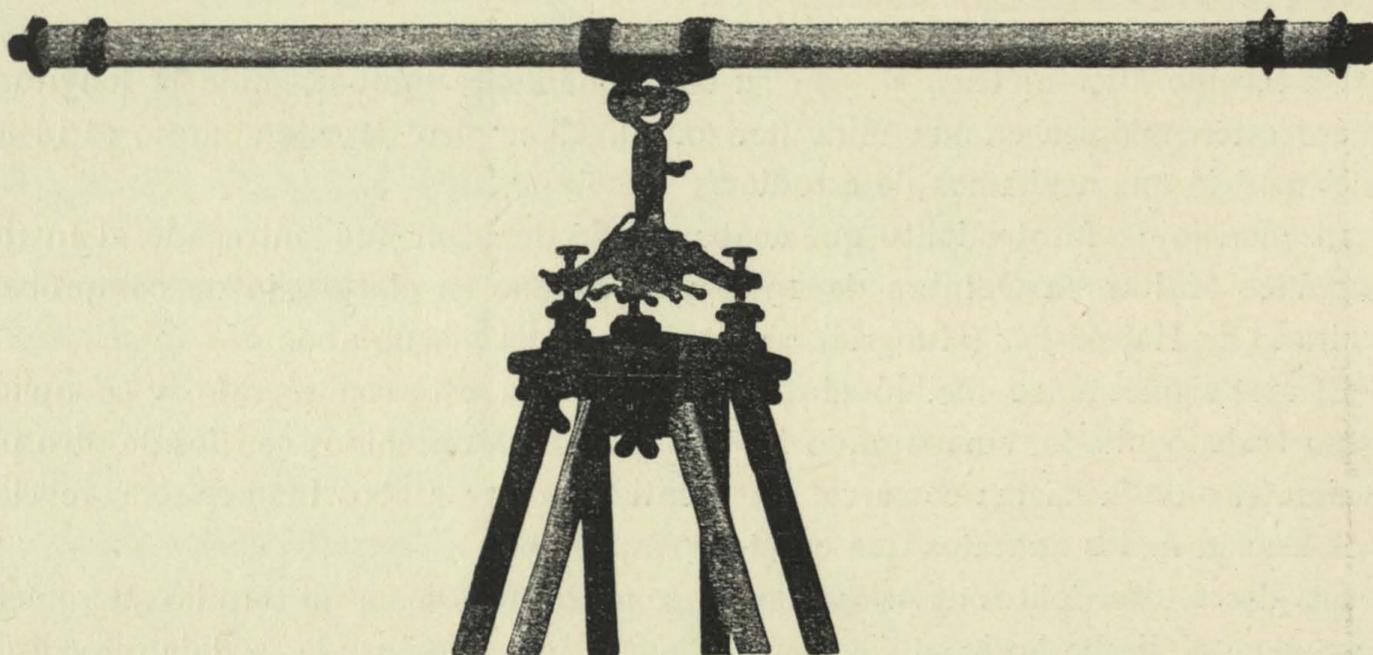


Fig. 28

rencia entre la lectura anterior y la que ahora se haga. La base buscada es, en metros, 10,000 dividido por este número.

Si la estadia tuviera 2, 3,..... metros de longitud, la base buscada sería 20,000, 30,000,..... partido por la correspondiente diferencia de lecturas del tambor.

Los dos fototeodolitos que acabamos de describir están admirablemente contruídos, como todos los aparatos que salen de los talleres de Zeiss, pero tanto uno como otro tienen elementos innecesarios que aumentan su peso y coste. Tal sucede, entre otros, con el anteojo doblemente acodado del primer tipo y el nivel esférico interior y la alidada fotográfica del segundo.

Por este motivo el capitán von Orel modificó el segundo de los fototeodolitos descritos, creando un nuevo modelo de aparato, que ya no es fototeodolito, sino simplemente fotográmetro, y que dió excelente resultado en los trabajos efectuados el verano último en la Estiria, y en los cuales tomó parte el que estas páginas escribe. Exigía, es

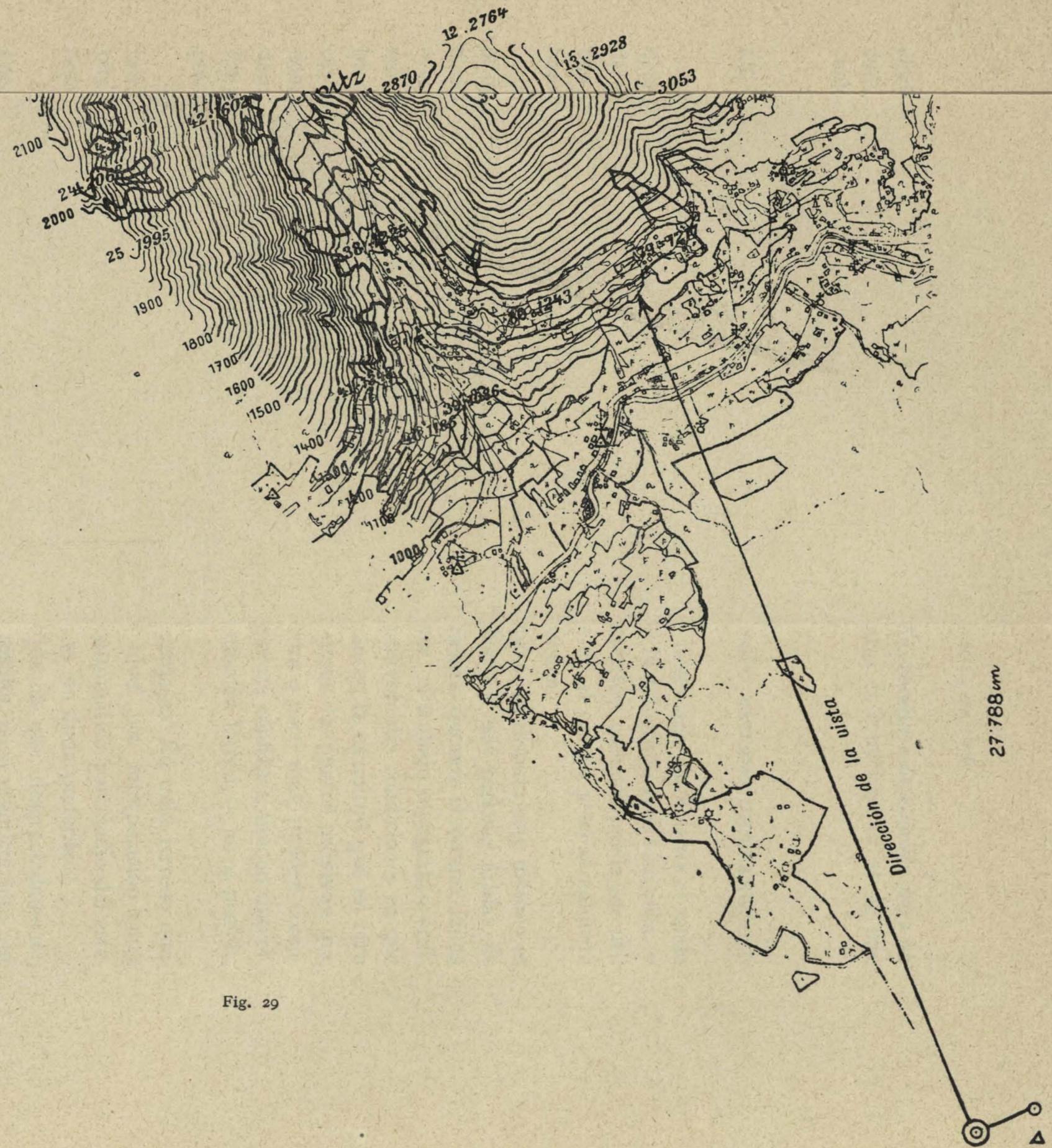


Fig. 29

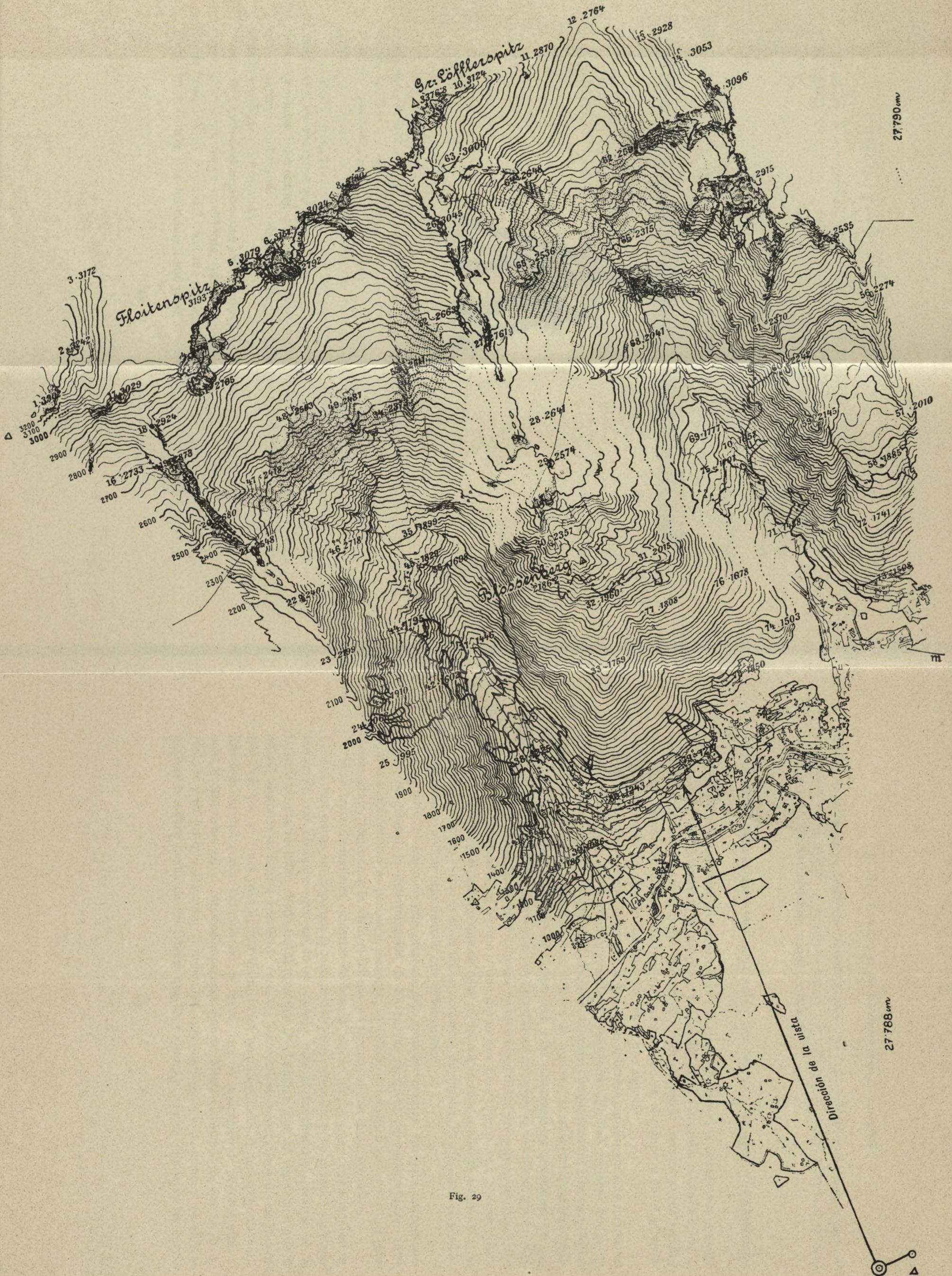


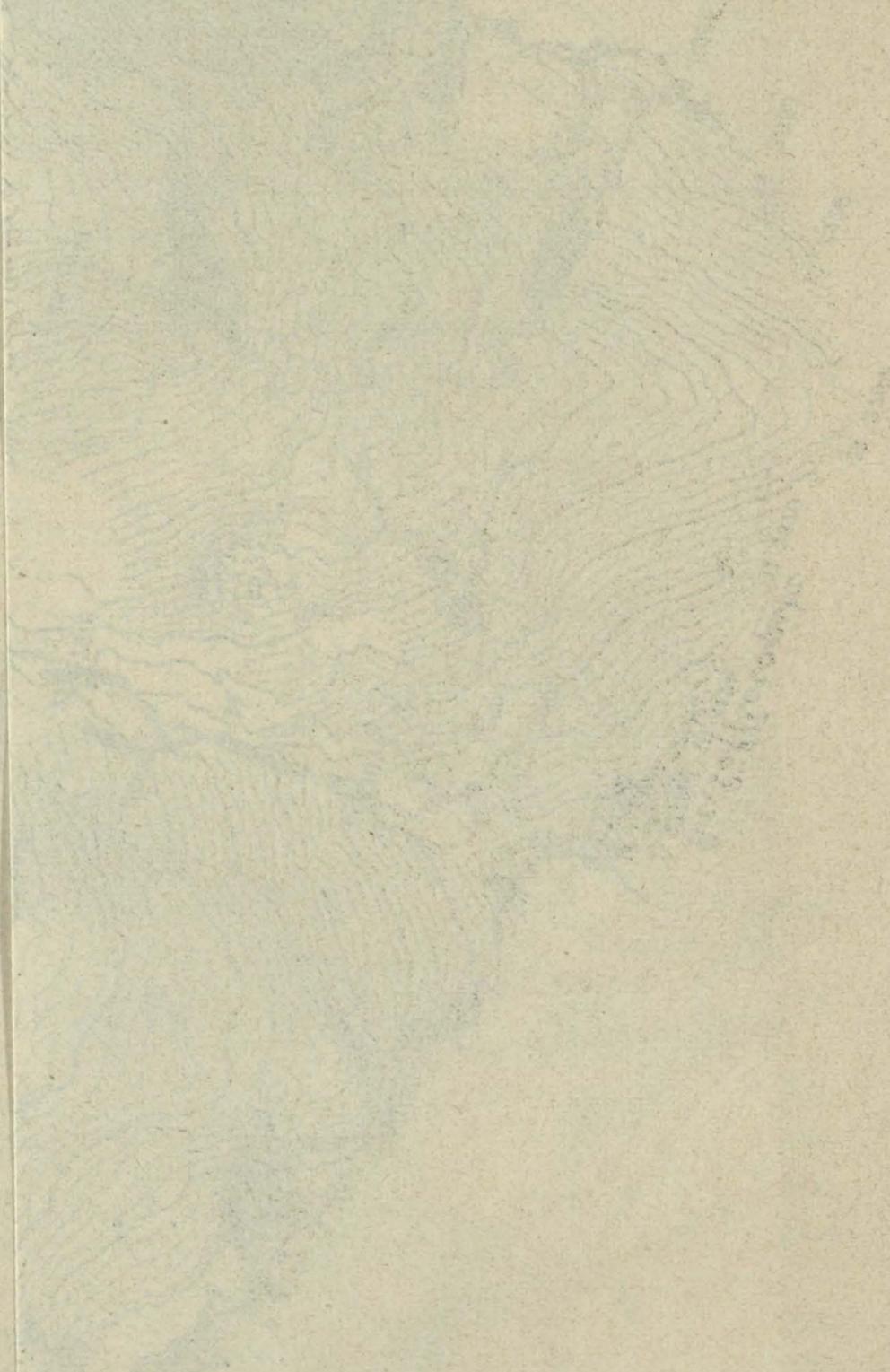
Fig. 29

2.9

SL 38744

SL 38744

Distance 15 miles



Collection

cierto, llevar además de él, un teodolito, pero con todo, resulta más cómodo para su transporte en el campo, y el precio de los dos aparatos es muy inferior al de uno cualquiera de los fototeodolitos a que substituyen.

IX. — IDEAS GENERALES SOBRE APLICACIÓN DEL MÉTODO ESTEREOFOTOGRAFÉMICO

Aunque de lo expuesto en las anteriores páginas se desprende claramente el modo de efectuar el levantamiento de un plano por medio de la fotografía estereoscópica, y de emplear los diferentes aparatos que en ellos van descritos, creemos puede ser útil una ligera exposición de las sucesivas operaciones que en el campo y en el gabinete han de efectuarse, y a ella dedicaremos las líneas que siguen.

Ante todo diremos que el terreno a que debe aplicarse sin disputa este método es el de alta montaña, con vertientes grandes y despejadas. En esas regiones áridas, de clima muy frío, a las que sólo puede llegarse en corto tiempo durante el verano, faltas o escasas de caminos, siendo por esto difíciles de recorrer, el trabajo topográfico ordinario es penosísimo y de abrumadora lentitud, y las desfavorables condiciones en que ha de efectuarse impiden que todas sus operaciones alcancen la exactitud que en otro caso pudiera exigirse. En cambio, un par de estaciones desde dos puntos próximos que dominen gran extensión de terreno y que duran una hora o poco más, pueden cómodamente hacerse: y el trabajo que de ellas se deduce merece confianza mucho mayor. En el caso indicado — que es el de tantas comarcas de nuestra Patria, — no es posible, prácticamente, aplicar otro método que el fotográfico.

Pero no es el único en que presenta éste grandes ventajas. En todo terreno quebrado, en general, la determinación de las curvas de nivel por interpolación entre puntos taquimétricos es penosa e inexacta: su dibujo automático por medio del estereoautógrafo, teniendo a la vista el relieve del terreno, es sin duda preferible.

Si se trata de regiones cubiertas de bosque espeso (de las que, desgraciadamente, quedan tan pocas en España), el método fotográfico resulta poco práctico: hay que reconocer, no obstante, que no lo es mucho más el taquimétrico, porque si el terreno resulta invisible desde las alturas que lo dominan por la vegetación que lo cubre, tampoco es fácil a través de éste, ver los vértices consecutivos de los itinerarios con que se cruce para aplicar los métodos no fotográficos. Y una pequeña zona arbolada en una región desnuda no es óbice para la aplicación de la fotografía: al colocar las vistas en el estereocomparador nunca faltan claros por los que se divise el suelo y en los que descansar el índice del estereomicroscopio y, además, en ellos se aprecia la altura media de los árboles que las rodean, y pueden dibujarse las curvas

de nivel llevando el índice, no apoyado sobre el terreno invisible, sino hundiéndole en la masa de vegetación, la cantidad que se juzga precisa para que aquella posición quede obtenida.

El estudio de vías de comunicación es otro caso en que el método estereoscópico está casi siempre indicado. Desarrollanse aquéllas, en gran parte, por valles más o menos amplios, determinados necesariamente por los puntos de paso que con antelación se fijan, y en los cuales hay que proyectar el trazado tanteando pendientes, desarrollos y pasos especiales. Un itinerario trigonométrico a lo largo de las crestas que por uno u otro lado limitan el valle, y una serie de bases elegidas convenientemente en las laderas de éste, nos dan un plano mejor y más barato que el obtenido por otro procedimiento. Porque hay que tener además en cuenta que en las placas se encierran los datos de las vertientes del valle, en toda su altura, y cada trazado posible puede estudiarse en la zona conveniente, mientras que el plano taquimétrico, preparado siempre con escasa holgura alrededor de la línea que se estima probable, resulta frecuentemente escaso, y obliga a volver al terreno a completar lo que se juzga ahora indispensable y antes se abandonó.

Hay, en fin, multitud de pequeños trabajos topográficos para proyectos de pantanos, puentes, fortificaciones, encauzamiento de ríos, etc., en los que un par de fotografías obtenidas desde los extremos de una base, medida directamente como ya sabemos, pueden suministrar con ventaja todos los datos de campo necesarios.

Los casos citados en las líneas que preceden bastan para poder formar un criterio sobre las condiciones en que el método estereoscópico puede emplearse con ventaja más o menos considerable.

Pero conviene huir de la idea de que el nuevo procedimiento es capaz de substituir a los antiguos en todos los casos. Tan falta de sentido es esta afirmación como la de aquellos que creen que no puede hacerlo en ninguno. En los trabajos de escasa importancia, fácil sería la elección entre los diversos sistemas: en los que abarcan zonas extensas seguramente habrá de hacerse uso de varios de ellos combinados, y el buen criterio del operador es el único que puede determinar qué parte corresponde a cada uno de los diferentes métodos.

X. — TRABAJOS DE CAMPO EN UN LEVANTAMIENTO ESTEREOFOTOGRAFICO

El enlace de las partes de plano obtenidas desde los extremos de las diferentes bases exige que en cada par de fotografías aparezcan, al menos, tres puntos cuya posición se conozca exactamente. Para lograr esto, es preciso establecer en toda la

zona cuyo plano ha de levantarse, una triangulación trigonométrica, con la distribución de puntos que para el indicado objeto se juzgue precisa. Ninguna regla puede darse para efectuar este trabajo: al recorrer el terreno, sin olvidar el fin concreto que con la red de triángulos se persigue, se elegirá en cada caso la solución más conveniente. Si se trata, por ejemplo, de una zona, bastante extensa, dominada siempre por varias cúspides elevadas, de las que tres, al menos, puedan aparecer en cada par de vistas, bastará con que se fijen aquellas cumbres, siempre que se hallen convenientemente situadas para definir los puntos de estación. Si es un terreno quebrado en que los panoramas quedan interrumpidos por crestas próximas, muchas de éstas habrán de ser vértices de la red, que resultará bastante espesa.

Cuando se trata de levantar el plano de una zona reducida, bastará quizá efectuar un itinerario que la rodee o la cruce por su parte central.

Establecidos ya los puntos trigonométricos que han de servir de base al levantamiento fotográfico, pasemos a ocuparnos de las operaciones exclusivas de éste.

En cada zona hay que comenzar por elegir el punto más adecuado para el establecimiento de la base estereoscópica. Habrá ésta de hallarse a la altura conveniente para alcanzar en las placas las crestas más elevadas y las vaguadas profundas; próximamente paralela a la divisoria aparente de la zona que ha de reproducirse, ya que esta zona ha de quedar comprendida en el campo de las vistas, siendo éstas normales, paralelas en la base o desviadas sólo 30° a uno u otro lado (1). Es preciso, además, que en el lugar elegido pueda amoldarse al terreno una base de longitud proporcionada a la distancia a que de ella se encuentran los más alejados entre los puntos del panorama que en el Estereoautógrafo han de aprovecharse con las placas que en los extremos de aquella base se impresionen. Generalmente se toma, como hemos dicho, para magnitud de la base, de $\frac{1}{20}$ a $\frac{1}{30}$ de la distancia citada, para la distancia focal de 0^m,20,

que es, aproximadamente, la de las cámaras usuales, y escalas próximas a la de $\frac{1}{25\ 000}$, que es la adecuada a trabajos de conjunto. Conservándose fija la distancia focal, la longitud de las bases aumenta proporcionalmente a las escalas empleadas: y, a igualdad de escala, aumenta aquella longitud al disminuir la distancia focal.

Conviene además que pueda fácilmente pasarse de uno a otro extremo de la base para transportar el material fotográfico.

Elegida definitivamente la base estereoscópica se colocan en sus extremos dos trípo-

(1) Esta oblicuidad es suficiente en casi todos los casos que en la práctica se presentan, y su constancia simplifica notablemente las operaciones, por la disposición explicada al describir los aparatos fotográficos.

des y se cargan con piedras, si es preciso, para aumentar su estabilidad, las bolsas de cuero que de sus tres pies pueden suspenderse. En uno de ellos se coloca el fototeodolito o fotogrametro y en el otro una placa metálica vertical, en la que aparece una púa roja sobre fondo blanco, y que debe quedar normal a la dirección de la base.

Nivelada la cámara, y dirigida su alidada a la púa del otro trípode, se obtiene la fotografía normal. Girando ahora la cámara hacia la izquierda hasta que el botón caiga en el hueco de la plataforma, formando un ángulo de 30° con la anterior, se obtiene la fotografía desviada a la izquierda. Haciendo en sentido contrario la misma operación, se sacará la fotografía desviada a la derecha.

Trasladando la cámara al trípode de la placa, y ésta al de aquél, se obtienen las tres fotografías del otro extremo de la base. Claro es que, si con menor número de vistas se puede abarcar toda la zona dominada por las estaciones elegidas, no será preciso impresionar las seis que hemos citado.

Antes de introducir en la cámara cada uno de los chasis es preciso inscribir en el borde del marco de aquélla, ciertas indicaciones útiles, que aparecerán impresas en la gelatina. Son éstas, en general, la fecha, extremo de la base desde el cual se obtiene la fotografía, posición de ésta (normal, izquierda o derecha), y algunos otros que cada operador juzga convenientes, y que corresponden a los de un registro especial que al efecto se lleva y sirve para consignar todas las observaciones que a cada placa se refieren.

Con las operaciones anteriores puede, en general, darse por terminado el trabajo de campo, a no ser que se trate del caso de una zona reducida, en el que, como antes dijimos, no teniendo puntos de referencia en que apoyarse, es preciso medir directamente la base, por uno de los métodos que en su lugar explicamos.

Aunque no es necesario, como más adelante veremos al exponer los trabajos de gabinete, las brigadas del Instituto Geográfico Militar Austriaco suelen tomar desde la estación de la izquierda, que se considera como directora, con los órganos adecuados del fototeodolito, o con el teodolito independiente que los suple, los rumbos y ángulos de altura de tres o cuatro de los puntos trigonométricos que desde la estación se divisan.

Conviene advertir que para su observación en el estereocomparador, son preferibles las placas obtenidas con luz difusa, no excesivamente débil, a las que presentan contrastes vivos de luz, obtenidas en días de sol. Y de las fotografías impresionadas en estos días son preferibles las de las horas en que el sol se halla muy elevado y las sombras son, por ello, menos extensas.

Sólo diremos ya, para no alargar demasiado estas indicaciones, que es indispensable en todas las operaciones descritas el mayor esmero, como es preciso disponer de aparatos y placas de inmejorable calidad: muy especialmente hay que procurar que

las placas se hallen en la debida situación al ser impresionadas y para conseguir esto es conveniente, después de colocado el objetivo en la debida posición de su carrera, y abierta la tapa del chasis, comprobar con esmero la nivelación del aparato y la puntería de su alidada.

En éste, más aún que en otros métodos topográficos, el buen resultado del trabajo depende, en gran parte, de la precisión con que se lleva a cabo.

XI. — TRABAJOS DE GABINETE Y EMPLEO DEL ESTEREOAUTÓGRAFO DE OREL

Antes de comenzar su exposición diremos que en ella sólo hemos de hacer referencia a los que hay que efectuar empleando el Estereoautógrafo, que los simplifica extraordinariamente, porque la explicación del uso de este aparato es el objeto principal del presente trabajo (1).

Para el empleo del Estereoautógrafo distinguiremos tres casos, correspondientes a otros tantos que en el campo pueden presentarse.

1.º caso. El levantamiento no exige más que una sola base, y ésta ha sido medida directamente.

Elegido un par de placas, se colocan en el Estereocomparador, del modo que en lugar oportuno explicamos, y se efectúan las correspondientes correcciones. Luego se toma, en la escala graduada que a este fin lleva el aparato, la longitud de la base (medida en el campo), a la escala a que se desea el plano y se colocan los ejes de giro I, II y III de las palancas a distancias iguales a la distancia focal de la cámara empleada de sus extremos inferiores x_1 , y_1 y x_2 .

Si el par de placas que se ha elegido es de las dos normales, la base se coloca paralela al puente. Si son las dos desviadas al mismo lado, hay que situarla formando con el puente el ángulo de desviación (que en general será de 30°). Finalmente, si las dos placas que en el Estereocomparador hemos colocado no se hallan en ninguno de los dos casos citados, es decir, no son paralelos, habrá que quebrar la varilla derecha en el ángulo (30 ó 60°) que aquéllas formaban en el campo.

Preparado en esta forma el aparato, el extremo izquierdo de la base aparecerá en el plano bajo el eje de giro I de la varilla de la izquierda, y la recta principal de la

(1) Para el que desee emprender un levantamiento por el método de la fotografía estereoscópica, pero sin disponer del Estereoautógrafo ni, quizá, del Estereocomparador, recomendamos el excelente folleto que, con el título «Aplicaciones Topográficas de la Fotografía. Estereofotogrametría» publicó poco ha nuestro querido amigo el eminente profesor de Topografía de la Escuela Superior de Guerra, D. Alejandro Más y Zaldúa, Teniente coronel de E. M.

placa del mismo lado, cuando el punto central de ésta caiga bajo el respectivo microscopio, será la proyección horizontal del eje de la cámara al obtener la citada vista, que llamamos directora. La escala de alturas se situará de modo que en su encuentro con la recta $y=0$ se lea la altura absoluta de la estación directora.

El dibujo del plano con todos sus elementos quedó explicado al tratar del uso del Estereoautógrafo.

2.º caso. El levantamiento exige una red de puntos determinados trigonométricamente, y en el campo se han dirigido visuales en algunos de éstos con el teodolito u órganos equivalentes del fototeodolito.

Ante todo, es preciso dibujar, a la escala a que el plano se desee, la red de puntos trigonométricos, cuyas coordenadas planimétricas y alturas se habrán calculado previamente.

Luego se calculan, por el método analítico o gráfico de Pothénot, las coordenadas planimétricas y alturas de las estaciones directoras desde las cuales se hizo la observación de cada grupo de puntos: y se sitúan en el plano: y en éste se marcan igualmente, las direcciones que tenía el eje de la cámara al obtenerse cada una de las vistas directoras.

Se mueven los ejes de giro I, II y III hasta que disten la distancia focal, f , de la cámara, de la recta en que se mueven los extremos inferiores de las varillas de dirección, alturas y paralajes.

En función de los datos obtenidos en el campo, hay que calcular la longitud de la base estereoscópica. Efectúase este cálculo aplicando a uno cualquiera de los puntos de la triangulación la conocida fórmula

$$b = D \frac{\pi}{f},$$

en la que las tres cantidades que entran en el segundo miembro son conocidas, ya que f viene dado por la cámara, el paralaje π se mide en el tornillo micrométrico del estereocomparador, y la distancia D , a que de la estación directora se halla el plano de frente que contiene el punto elegido, es fácilmente medible en el plano o calculable en función de los datos tomados en el campo (1). Repitiendo el mismo cálculo, con datos referentes a otro u otros varios de los puntos de la triangulación a que en

(1) Es el producto de la distancia, reducida al horizonte, de un punto de la triangulación a la estación directora por el coseno del ángulo que la visual a éste forma con el eje de la cámara o el seno de que la misma visual forma con la proyección horizontal de la dirigida a la estación no directora.

el campo se apuntó, obtendremos diversos valores de la base b , y tomaremos como definitivo la media de todos ellos, que habrán de diferir muy poco unos de otros. Fijada ya ésta, se situará en la regla correspondiente del Estereoautógrafo, y se inclinará ésta en uno u otro sentido, si a ello ha lugar, conforme a lo que en el caso anterior explicamos.

También se quebrará la varilla de la derecha, como vimos en el caso 1.^o, si el par de placas que se ha de observar exige tal operación.

Colocado en el microscopio un par de placas, en la forma y con las correcciones que al describir el Estereocomparador explicamos y preparado el Estereoautógrafo según en el caso anterior hemos dicho, se lleva la hoja en que se han representado los puntos citados a la posición en que la estación directora correspondiente caiga bajo el eje de giro I de la varilla de la izquierda.

Se observa el relieve del terreno en el estereomicroscopio y, por medio de los convenientes movimientos de las tres manivelas se lleva el índice del campo de aquél a descansar sobre la imagen de uno de los puntos de la triangulación: manteniendo fijo el punto I en el papel, se hace girar a éste hasta que la imagen de aquel punto caiga, como debe, bajo la regla de la izquierda que, de este modo, marcará la dirección del mismo. Por el mismo punto debe pasar el puente y, por tanto, sobre él caer el lápiz del trazador P. Si así no fuere, sería debido a falta de exactitud en la colocación de la base o la distancia focal, o en la coincidencia del índice del microscopio con el punto trigonométrico del terreno. Si el trazador P cae exactamente sobre la imagen del punto en la hoja del plano, éste se hallará en la posición debida, la cual podrá aún comprobarse repitiendo la operación descrita para otro u otros de los vértices de la triangulación.

Comprobado ya que el Estereoautógrafo se halla convenientemente preparado, podemos dedicarnos al dibujo del plano, con todos sus elementos, según explicamos en lugar oportuno.

3.^{er} caso. En el campo no se han dirigido visuales a los puntos de la triangulación que aparecen en las placas ni se ha medido la base.

En el Instituto Geográfico Militar Austriaco hemos visto trabajar siempre en la forma indicada en el caso anterior, que exige en el campo la toma, desde la estación directora, de los azimutes y ángulos de altura de algunos puntos de la triangulación previa.

Nosotros juzgamos innecesario dicho trabajo y el empleo de los aparatos que exige, y recomendamos el método siguiente, que ofrece la ventaja de una rapidez y comodidad mayores, sin dejar de alcanzar tanta precisión como el ya explicado.

Como aparato de campo emplearemos una cámara fotográfica construída con el

mayor esmero, y provista de un anteojo de eje de giro exactamente normal a la placa: la cámara empleada por Orel en los trabajos del presente año es excelente modelo para el fin que perseguimos. Prescindiremos del teodolito que el capitán austriaco llevaba además de la cámara.

Obtendremos las fotografías en la forma indicada al describir los trabajos de campo, cuidando de que en uno, al menos, de los pares de placas obtenidas desde los extremos de cada base aparezcan tres vértices de la triangulación, y uno de éstos en cada uno de los demás pares de placas. Y sin más que estos datos, pasamos a operar en el gabinete.

Comenzaremos por colocar en su lugar adecuado, la distancia focal f de la cámara y la escala de alturas; y por situar la base en la posición debida (paralela al puente o formando con él un ángulo conocido de desviación), y quebrar, si es preciso, la varilla de la derecha: todo ello de modo idéntico al explicado en el primer caso.

A la base (cuya longitud aun no es conocida) daremos provisionalmente un valor arbitrario.

Colocaremos en el Estereocomparador, del modo repetidamente indicado, el par de placas (una de cada extremo de la base) en que aparezcan los tres vértices (1); y observando por el microscopio, haremos coincidir el índice de su campo, sucesivamente, con la imagen de cada uno de éstos. Sobre una hoja de papel en blanco que en el tablero del Estereoautógrafo se habrá dispuesto, marcaremos las proyecciones de los mismos: éstas formarán un triángulo semejante al homólogo de la triangulación, que tenemos calculada.

Aumentaremos o disminuirémos la longitud de la base, en la misma proporción que existe entre la escala a que resulta el triángulo obtenido y la que queremos emplear en el dibujo del plano, y con esto tendremos preparado el aparato.

La colocación bajo el Estereoautógrafo de la hoja esqueleto en que tenemos dibujada la triangulación y queremos obtener el plano, se fija haciendo que dos de los puntos de ésta (que aparezcan en las placas) caigan bajo la punta del trazador en el momento en que el índice del microscopio coincide con su imagen respectiva.

El tercer punto, u otros varios si existen, pueden emplearse en la misma forma, y servirnos de comprobación o corrección de las operaciones efectuadas.

E inmediatamente se puede pasar al dibujo del plano, con todos sus elementos, en la parte que haya de deducirse del par de placas que en el aparato tenemos preparadas.

(1) Con tal de que las placas que formen este par se hayan obtenido una desde cada uno de los extremos de la base, podrán éstas formar ángulos cualesquiera (conocidos en el campo) con la base.

Si desde los extremos de la misma base se obtuvieron otras fotografías, se colocarán a su vez en el estereocomparador, y se efectuará el giro de la base (sin variar su magnitud) y el quiebro de la varilla de paralajes, según los casos. Preparado en esta forma el aparato, y para que la zona del plano que ahora ha de construirse concuerde con la ya dibujada y con la triangulación que tenemos en la hoja de aquél, es preciso hacer girar a ésta un ángulo igual y de signo contrario al que describió en el campo la cámara colocada en la estación directora para pasar de la posición en que produjo la vista que hemos utilizado a aquella en que se obtuvo la que acabamos de colocar en el aparato.

Apuntando con el estilete al vértice que en el nuevo par de fotografías aparece, y viendo si el trazador cae sobre la proyección dibujada de éste, tendremos una comprobación conveniente, aunque no indispensable, de la disposición del Estereoautógrafo. Con esto podremos comenzar el dibujo de la nueva parte del plano.

Y lo mismo haremos para cada nuevo par de placas, entendiéndose que el giro de la hoja ha de efectuarse sólo cuando se cambia la placa de la izquierda, no cuando ésta se combina con varias obtenidas en la estación de la derecha.

Las ventajas que este nuevo método operatorio ofrece, son tan evidentes como dignas de tenerse en cuenta.

En el campo nos evita el empleo del teodolito con el consiguiente ahorro del coste de su adquisición y arrastre y tiempo que en emplearlo se hubiera gastado.

En el gabinete evita el cálculo, siempre largo y enojoso, de las coordenadas de las estaciones directoras.

La orientación de la hoja del plano bajo el aparato es idéntica en uno y otro caso: y análogo también el cálculo de la base, ya que se reduce siempre a una cuarta proporcional: en el método antiguo, la representada por la fórmula

$$b = \frac{D}{f} \pi,$$

y en el moderno, la que amplifica o reduce la base provisional en la relación de escalas que más arriba indicamos.

Vamos a ver que la exactitud que con el nuevo método se obtiene no es menor que la que se alcanza con el antiguo.

Llamemos b a la base que queremos determinar, b' a la que provisionalmente hemos tomado, L la distancia entre los dos puntos trigonométricos en la escala a que se va a dibujar el plano y L' la distancia entre los mismos puntos, medida en la hoja en que, para la construcción auxiliar, se han dibujado.

La base buscada b , vendrá dada por la fórmula

$$b = \frac{L}{L'} b'$$

la cual, diferenciada, da

$$\Delta b = \frac{L}{L'} \Delta b' - \frac{L b'}{L'^2} \Delta L',$$

que es la expresión del error con que se obtiene la base b , en función de los cometidos en la apreciación de las magnitudes b' y L' , ya que L puede calcularse analíticamente con toda la precisión deseable.

En el primer término de esta expresión puede siempre, tomando para valor de b' el total de la escala correspondiente, hacerse que el cociente $\frac{L}{L'}$ sea menor que la unidad y, por tanto, el término menor que $\Delta b'$, es decir, menor que la apreciación de la escala en que se miden las bases: podemos, pues, despreciarlo desde luego.

En el segundo término, la fracción $\frac{L b'}{L'^2}$ puede descomponerse en producto de dos: una $\frac{L}{L'}$ que, como acabamos de ver, es menor que la unidad, y la otra $\frac{b'}{L'}$, que es muy pequeña, ya que la base resulta siempre notablemente menor que la distancia que entre sí separa a los vértices de la triangulación. El término total es, pues, muy inferior al error $\Delta L'$ cometido en la medida de la distancia L' .

Veamos ahora la influencia que en la fijación de los puntos del plano tiene el error cometido en la determinación de la base.

La distancia D del plano de frente que pasa por un punto a la estación directora viene dada por la fórmula

$$D = \frac{f}{\pi} b.$$

que, diferenciada, da

$$\Delta D = \frac{f}{\pi} \Delta b = \frac{D}{b} \Delta b$$

y, substituyendo en lugar de Δb el valor que acabamos de hallar, podemos escribir

$$\Delta D = \frac{D}{b} \times \frac{L b'}{L'^2} \Delta L' = \frac{L}{L'} \left(\frac{D}{b} \times \frac{b'}{L'} \right) \Delta L'.$$

Notemos que la fracción $\frac{L}{L'}$ es, como su igual $\frac{b}{b'}$, menor que la unidad y que también lo es la cantidad comprendida en el paréntesis, siempre que la distancia D del plano de frente del punto sea, como en la práctica acontece usualmente, menor que los lados L', de la triangulación. Luego

$$\Delta D < \Delta L',$$

es decir, que el error que en la fijación de los puntos del plano se comete, es inferior a la exactitud gráfica con que puede medirse en éste una distancia.

La exactitud del nuevo método es, pues, superior a la que en el plano puede apreciarse.

XII. — LÍMITE DE EMPLEO Y APROXIMACIÓN DEL MÉTODO ESTEREOSCÓPICO

El efecto de relieve, fundamento de este método, procede, según sabemos, de la diferencia entre las dos fotografías que representan un mismo objeto. Para cada par de fotografías, tomadas desde los extremos de una base, esta diferencia que en cierto modo viene medida por la paralaje, disminuye al aumentar la distancia a que los diferentes puntos observados se encuentran; de aquí que llegue esta distancia a un cierto valor, para el cual el relieve desaparece. Y puede este relieve aparecer de nuevo, si se aumenta el valor de la base: es decir, si se alejan una de otra los dos puntos de estación. El límite de percepción estereoscópica viene dado por una relación fija entre la base y la máxima distancia a que desde los extremos de aquélla puede apreciarse el relieve.

La experiencia ha demostrado que el ángulo cuya tangente es esta relación es, para un operador de vista normal, de 30''. Siendo de 0^m,065 la separación normal de los ojos, el límite de percepción estereoscópica a simple vista es, como en otro lugar dijimos, de unos 450 metros.

Para poder apreciar el relieve a distancias mayores es preciso amplificar esta base, lo cual se consigue por medio de estereoscopios provistos de lentes y espejos, como el que hemos descrito en el estereocomparador. Pero en la práctica no es posible aumentar indefinidamente la base, por dificultad de amoldarla al terreno, ni aun disponiendo de base suficientemente grande puede aumentarse indefinidamente la distancia por la poca claridad con que reproduce la fotografía los puntos muy lejanos, y porque, además, al ir apareciendo el relieve en zonas más lejanas, desaparece en las más próximas, donde también es necesario.

Este es el límite que podemos llamar teórico, del empleo del método de los paralajes. Pero hay otro límite, inferior al anterior, procedente de los errores que en la medida de los datos del campo se cometen en el gabinete, y que vamos ahora a estudiar.

Estos errores pueden agruparse en dos grupos: unos, variables para cada punto y que no pueden ser corregidos, habiéndonos de limitar a medirlos para ver si su límite superior es admisible. Y otros que, procediendo de errores en la medida de los datos, son constantes para cada par de placas, y pueden medirse y corregirse en todos los puntos en que éstos aparezcan.

Ocupémonos ahora de los primeros. Las coordenadas de un punto vienen dadas, según sabemos, por las tres fórmulas

$$D = bf \frac{1}{\pi}; \quad X = x \frac{D}{f}; \quad Y = y \frac{D}{f}.$$

A un error $\Delta\pi$, en la paralaje, medida en las placas, corresponde en la distancia D otro error

$$\Delta D = (D + \Delta D) - D = bf \left(\frac{1}{\pi + \Delta\pi} - \frac{1}{\pi} \right) = bf \frac{-\Delta\pi}{\pi^2},$$

despreciando en el denominador el término $\Delta\pi$, que es sumamente pequeño. Substituyendo en lugar de la paralaje π su valor, deducido de la fórmula

$$\frac{D}{b} = \frac{f}{\pi},$$

obtenemos, como valor definitivo del error en la determinación de la distancia, por el de medida de la paralaje,

$$\Delta D = - \frac{D^2}{bf} \Delta\pi$$

error que, como vemos, aumenta con la distancia D y disminuye al aumentar la base y la distancia focal.

A errores $\Delta x, \Delta y$ en la medida, en la placa, de la abscisa y ordenada de la imagen de un punto, corresponden, en los valores de la X e Y de éste, errores ΔX e ΔY dados por las expresiones

$$\Delta X = (X + \Delta X) - X = \frac{D}{f} [(x + \Delta x) - x] = \frac{D}{f} \Delta x$$

$$\Delta Y = (Y + \Delta Y) - Y = \frac{D}{f} [(y + \Delta y) - y] = \frac{D}{f} \Delta y$$

es decir, que, como el error de distancia, aumentan con ésta y disminuyen al aumentar la distancia focal f .

Los tres errores anteriores son variables para cada punto y no pueden, por tanto, corregirse. Vamos a hallar su límite superior.

La apreciación del tornillo micrométrico que para la medida de las paralajes lleva el estereocomparador es, como vimos al describir éste, de $0^m,00001$: a simple vista puede apreciarse con seguridad la mitad de esta magnitud; o sea $0^m,000005$; éste será, pues, el máximo valor del error $\Delta\pi$. Substituyendo su valor en la expresión de ΔD , obtenemos para ésta el valor

$$\Delta D = -\frac{D^2}{bf} \times 0^m,000005.$$

Dando a f el valor corriente de $0^m,20$; a D el máximo que en la práctica ordinaria alcanza, 15000^m , y a b el que a esta distancia corresponde (según la relación recomendada, de $\frac{1}{20}$ a $\frac{1}{30}$) que es de 500 metros, vemos que el error máximo que en la determinación de la distancia puede cometerse es de

$$\Delta D = \frac{225000000}{500 \times 0,20} \times 0^m,000005 = 11^m,25.$$

Los nonius que miden las abscisas x y ordenadas y miden 9^m divididos en diez partes: y como puede apreciarse con el microscopio media división, los errores Δx e Δy no podrán exceder de $0^m,00005$. Substituyendo en las expresiones anteriores, tendremos

$$\Delta X = \frac{15000}{0,20} \times 0^m,00005 = 3^m,75$$

$$\Delta Y = \frac{15000}{0,20} \times 0^m,00005 = 3^m,75$$

como valores máximos de los errores cometidos en X e Y .

Tanto éstos como el ΔD vemos son más que aceptables para los trabajos topográficos, y muy inferiores a los que, en caso análogo, producen todos los demás procedimientos.

Pero en los anteriores cálculos hemos supuesto conocidos exactamente los valores de la base b y la distancia focal f . Y, si esto es admisible en lo que a la segunda se

refiere, porque puede determinarse con toda la aproximación deseable en el taller en que se construye la cámara, no sucede con la primera.

Diferenciando la expresión de D en función de la base obtenemos

$$\Delta D = \frac{f \Delta b}{\pi} = \frac{D}{b} \Delta b$$

y como la relación entre la distancia máxima D y la base correspondiente b es un número que no excede, como sabemos, de 30, resulta que, en el caso más desfavorable, el error que en el valor de la distancia se obtiene es 30 veces mayor que el que se cometió en la medida de la base. El error relativo es

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Otro error que influye en la determinación de las distancias es el de paralajes, procedente de que los dos planos no se hallen exactamente en un plano (1).

Supongamos que la placa de la derecha p'' no se halla en el plano p' de la izquierda (fig. 29), sino que forma con éste un ángulo τ. La paralaje verdadera es

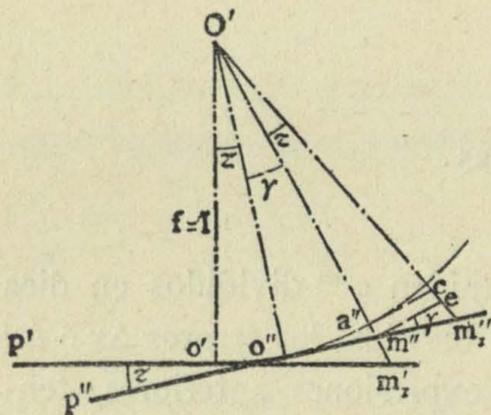


Fig. 29

y la errónea

$$\pi = x_1 - x_2$$

$$\delta\pi = x_1 - x'_2.$$

siendo

$$x_2 = o'm' \text{ y } x'_2 = o''m''$$

Tomemos

$$o''m''_1 = o'm'_1;$$

el error de paralaje será

$$\varepsilon = \pi - \delta\pi = x_2 - x'_2 = o'm'_1 - o''m'' = o''m''_1 - o''m'' = m''m''_1.$$

Tracemos la circunferencia de radio O'o'' y tangente a la placa p'' en o''; la tangente en a'' a esta misma curva y la paralela a esta tangente por m''; y llamemos γ al ángulo de la visual O'm'' con el eje de la placa O'o''; a este ángulo será igual el m''m''e, por tener sus lados perpendiculares a los de aquél.

Despreciando infinitamente pequeños de orden superior, podemos escribir

$$m''m''_1 = \frac{m''e}{\cos \gamma}.$$

(1) Hemos visto anteriormente que al caso de placas situadas en un plano podían reducirse los demás.

Los triángulos semejantes $O'a''c$ y $O'm''e$ nos dan, haciendo

$$O'a'' = f = 1,$$

$$\frac{m''e}{a''c} = \frac{\sec \gamma}{1}; \quad \frac{m''e}{\tau \operatorname{sen} \alpha''} = \frac{\sec \gamma}{1},$$

y, substituyendo este valor de $m''e$ en el de ε

$$\varepsilon = \frac{\tau \sec \gamma \operatorname{sen} \alpha''}{\cos \gamma} = \frac{\tau \operatorname{sen} \alpha''}{\cos^2 \gamma}.$$

Vemos que este valor del error de paralaje aumenta con el de desviación τ , de la placa, e inversamente del cuadrado del coseno del ángulo de dirección γ de cada punto; es decir, que aumenta rápidamente a medida que los puntos se alejan del plano vertical que pasa por el eje de la placa, resultado que comprueba la simple inspección de la figura.

Designando por δD el error que en la distancia D produce una desviación τ de la placa, tendremos su valor

$$\delta D = bf \left(\frac{1}{\pi + \varepsilon} - \frac{1}{\pi} \right) = bf \frac{-\varepsilon}{\pi^2} = -\frac{D^2 \varepsilon}{bf} = \frac{D^2}{bf} \times \frac{\tau \operatorname{sen} \alpha''}{\cos^2 \gamma}.$$

El error relativo correspondiente será

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{D}{bf} \times \frac{\tau \operatorname{sen} \alpha''}{\cos^2 \gamma}.$$

El error total que en la distancia producen los dos últimos citados, es la suma

$$\Delta D + \delta D = \frac{D}{b} \Delta b \pm \frac{D^2}{bf} \times \frac{\tau \operatorname{sen} \alpha''}{\cos^2 \gamma}.$$

Notemos que el valor de los errores Δb y τ es constante para cada par de placas: si, pues, conocemos por el cálculo el valor exacto de D y medimos el erróneo obtenido

$$D + \Delta D + \delta D$$

para un cierto número de puntos, podremos substituirlos en la expresión anterior y tendremos el sistema de ecuaciones

$$\Delta D_1 + \delta D_1 = \frac{D_1}{b} \Delta b \pm \frac{D_1^2}{bf} \times \frac{\tau \operatorname{sen} \gamma''}{\cos^2 \gamma_1},$$

$$\Delta D_2 + \delta D_2 = \frac{D_2}{b} \Delta b \pm \frac{D_2^2}{bf} \times \frac{\tau \operatorname{sen} \gamma''}{\cos^2 \gamma_2},$$

.....

de las que, aplicando el método de los mínimos cuadrados, obtendremos los valores más probables del error de base Δb y de desviación τ . Substituídos éstos en las expresiones de ΔD y δD , conoceremos las correcciones constantes que hay que hacer en los valores de las distancias de todos los puntos.

Además de los citados, hay otros errores procedentes de múltiples causas personales del operador o materiales de los instrumentos. Dificiles de apreciar y medir aisladamente, la resultante de todos ellos no alcanza valores excesivos, como se observa en la práctica del método, que presenta comprobaciones tan decisivas como la de la repetición del dibujo de curvas de nivel, en la que se ve que los diferentes trazados de cada una de éstas no difieren, como anteriormente dijimos, en más de $0^m,0002$.

JOSÉ MARÍA TORROJA